



Action du groupe des opérateurs de gamétisation sur les identités ω -polynomiales

Cristián Mallol ^a, Richard Varro ^{b,*}

^a Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de La Frontera, Casilla 54-D, Temuco, Chile

^b Département de Mathématiques et Informatique Appliquées, Université de Montpellier III, 34199 Montpellier, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 24 novembre 2011

Disponible sur Internet le 24 novembre 2012

Communiqué par Alberto Elduque

MSC:

primary 17D92

secondary 16Rxx, 17A30

Keywords:

Baric algebras

Gametization of algebra

Non-homogeneous polynomial identity

ω -polynomial identity

ABSTRACT

The gametization process reduces the study of non-commutative and non-associative algebras satisfying non-homogeneous polynomial identities with variables in $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ to algebras verifying simpler identities. However after a gametization, certain identities remain invariant and other identities, said universal invariant, are invariant for every gametization. Now in the case $n = 1$, for all algebras satisfying a universal invariant polynomial identity studied until now, we know that the existence of an idempotent is not certain. Using an action of the gametization operators group on the non-commutative and non-associative algebra of polynomials $K\langle X \rangle$, we give all identities which are invariant and universal invariant by gametization.

© 2012 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

1. Introduction

Dans [3] on a introduit la gamétisée d'une algèbre. La gamétisation ramène l'étude d'algèbres définies par une identité à celle d'algèbres vérifiant des identités plus simples tout en préservant la pondération, les idempotents et les décompositions de Peirce par rapport à un idempotent. Mais de plus, dans tous les cas où elle a été appliquée, elle fait apparaître des classes d'algèbres correspondants aux identités invariantes pour toute gamétisation appelées invariantes universelles, pour lesquelles l'existence d'un idempotent n'est pas certaine, c'est-à-dire qu'il existe des algèbres qui admettent un idempotent et d'autres qui n'en ont pas. Par exemple on a montré que les algèbres commutatives qui vérifient l'identité $x^3 - (1 - \alpha)x^2 - \alpha x$ paramétrée par les scalaires α , sont les gamétisées d'algèbres vérifiant soit $x^3 - x$ qui admet un idempotent, soit $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ qui est invariante pour toute gamétisation et dans laquelle l'existence d'un idempotent n'est pas certaine [1]. De même on a

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : cmallol@ufro.cl (C. Mallol), richard.varro@univ-montp3.fr (R. Varro).

établi que les algèbres commutatives vérifiant une identité de la forme $x^2x^2 - \alpha x^3 - \beta x^2 - (1 - \alpha - \beta)x$ sont gamétisées soit d'une algèbre de Bernstein d'ordre 1 définie par $x^2x^2 - x^2$ soit d'une algèbre de rétrocroisement $x^2x^2 - 2x^3 - x^2$, qui est invariante pour toute gamétisation, or dans la première l'existence des idempotents est certaine alors que ce n'est pas le cas dans la seconde [4]. Dans ce même travail on a vu que les algèbres commutatives vérifiant l'identité $x^4 - \alpha x^3 - \beta x^2 - (1 - \alpha - \beta)x$ sont les gamétisées des algèbres vérifiant $x^4 - \delta x^2 - (1 - \delta)x$ ou de l'invariante par gamétisation $x^4 - 2x^3 - \gamma x^2 + (1 + \gamma)x$ (où l'invariante universelle correspond à $\gamma = -\frac{5}{4}$), pour lesquelles l'existence d'un idempotent est certaine si et seulement si $\delta \neq \frac{7}{4}$ et $\gamma \neq -\frac{5}{4}$ [2]. Dans [5] on a initié l'étude des algèbres commutatives définies par les identités du type $ax^2x^2 + bx^4 - \alpha x^3 - \beta x^2 - \gamma x$ où $ab \neq 0$ et $a + b = \alpha + \beta + \gamma$ se divisent en deux classes selon que $a + b = 0$ ou $a + b = 1$, par gamétisation leur étude se ramène aux algèbres vérifiant les identités suivantes :

$$x^2x^2 - x^4 - x^3 + (1 + \delta)x^2 - \delta x, \quad (1)$$

$$x^2x^2 - x^4 - \delta x^2 + \delta x \quad (\delta \neq 0), \quad (2)$$

$$(1 - a)x^2x^2 + ax^4 - \delta x^2 - (1 - \delta)x, \quad (3)$$

$$(1 - a)x^2x^2 + ax^4 - 2x^3 + (1 + \delta)x^2 - \delta x \quad (4)$$

où les identités (2) et (4) sont invariantes par gamétisation. En particulier elles sont invariantes universelles pour $\delta = \frac{1}{4}$ dans (2) et $a = 4\delta$ dans (4), on a montré dans [6,7] que dans ces cas l'existence d'un idempotent n'est pas certaine.

Dans ce qui suit après avoir donné en préliminaires les principales notions et notations qui seront utilisées, nous rappelons la définition de la gamétisation d'une algèbre pondérée non nécessairement commutative ni associative. Puis nous définissons le groupe des opérateurs de gamétisation et l'action de ce groupe sur l'espace des polynômes et les notions de polynôme invariant sous gamétisation et invariant universel. Ensuite nous explicitons les train polynômes à gauche et à droite à une variable qui sont invariants universels, nous utilisons ces polynômes pour déterminer les polynômes à plusieurs variables invariants universels et invariants sous gamétisation.

2. Préliminaires

Dans tout ce qui suit on note K un corps commutatif, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathfrak{M}(X)$ le magma engendré par X et $K\langle X \rangle$ la K -algèbre libre non commutative et non associative engendrée par l'ensemble X (voir [9]). Pour $w \in \mathfrak{M}(X)$, le degré de w en $x_i \in X$, noté $|w|_{x_i}$, est le nombre d'occurrence de x_i dans le monôme w et le degré de w noté $|w|$ est la longueur du monôme w . Pour $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i \in K\langle X \rangle$ avec $w_1, \dots, w_m \in \mathfrak{M}(X)$, le degré de f , noté $|f|$, est $|f| = \max\{|w_k|; \alpha_k \neq 0\}$ et pour tout $x_i \in X$, le degré de f en x_i est défini par $|f|_{x_i} = \max\{|w_k|_{x_i}; \alpha_k \neq 0\}$. Enfin un polynôme $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i$ est homogène si pour tout $x_i \in X$ et tout $1 \leq k \leq m$ on a $|w_k|_{x_i} = |f|_{x_i}$.

Pour tout entier $d \geq 1$ on note $\mathfrak{M}_d(X)$ l'ensemble des monômes $\mathfrak{M}(X)$ qui sont de degré d et $K\langle X \rangle_d$ le sous-espace de $K\langle X \rangle$ engendré par $\mathfrak{M}_d(X)$, on notera $c_d = \dim K\langle X \rangle_d$. Dans le cas où $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ on a

$$c_d = \text{card } \mathfrak{M}_d(X) = \frac{1}{d} \binom{2d-2}{d-1} \sum_{p_1+\dots+p_n=d} \frac{d!}{p_1! \dots p_n!}$$

en particulier si $n = 1$ on a $c_d = \mathbb{K}_d$ le d -ième nombre de Catalan.

Dans la suite on notera $\mathfrak{M}_d(X) = \{w_{d,i}, 1 \leq i \leq c_d\}$, alors $(w_{d,i})_{1 \leq i \leq c_d}$ est une base canonique de $K\langle X \rangle_d$.

Étant donné A une K -algèbre non nécessairement commutative ou associative. On dit que l'algèbre A est pondérée s'il existe un morphisme d'algèbres non nul $\omega : A \rightarrow K$ appelé une pondération de A , on note ceci (A, ω) , et l'image $\omega(x)$ d'un élément x de A est appelé le poids de x (voir [8]).

La définition suivante montre que les polynômes $f \in K\langle X \rangle$ tels que $f(\mathbf{1}) = 0$, où $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in K^n$ sont naturellement associés aux identités qui définissent des algèbres.

Définition 1. Étant donné $f \in K\langle X \rangle$ tel que $f = \sum_{k=1}^m \alpha_k w_k$ avec $w_k \in \mathfrak{M}(X)$, on dit qu'une algèbre pondérée (A, ω) vérifie l'identité f si on a

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \omega(z_1)^{|f|_{x_1} - |w_k|_{x_1}} \dots \omega(z_n)^{|f|_{x_n} - |w_k|_{x_n}} w_k(z_1, \dots, z_n) = 0$$

pour tout $z_1, \dots, z_n \in A$.

Une identité f vérifiée par une A est dite ω -polynomiale (ou ω -identité), le polynôme de plus haut degré de f est appelé le polynôme directeur de f . Lorsque le polynôme directeur de f est un monôme l'identité est dite ω -monomiale.

Par application de la pondération sur l'identité ci-dessus on a $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 0$ autrement dit $f(\mathbf{1}) = 0$.

Si $\text{card } K > \max\{|f|_{x_i}; x_i \in X\}$ on a que (A, ω) vérifie l'identité f si et seulement si $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tel que $\omega(a_i) = 1$, $1 \leq i \leq n$.

Étant donné $f \in K\langle X \rangle$ de degré ≥ 2 tel que $f(\mathbf{1}) = 0$. Existe-t-il une algèbre pondérée vérifiant f ?

Il est déjà clair que si $f \in \mathfrak{M}(X)$ la réponse est négative car on aurait $A = \ker \omega$. L'exemple suivant apporte un élément de réponse.

Exemple 2. Une K -algèbre pondérée (A, ω) est quasi-constante s'il existe $e \in A$ tel que $\omega(e) \neq 0$ et $xy = \omega(x)\omega(y)e$, pour tout $x, y \in A$. Il en résulte que l'élément $\omega(e)^{-2}e$ est idempotent. Soient $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $f \in K\langle X \rangle$, $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j$ avec $m \geq 2$, $\alpha_j \in K \setminus \{0\}$ et $w_j \in \mathfrak{M}(X)$ ($1 \leq j \leq m$) tel que $f(\mathbf{1}) = 0$. Si pour tout $1 \leq j \leq m$ on a $|w_j| \geq 2$, alors toute algèbre quasi-constante vérifie l'identité f .

3. Gamétisation d'une algèbre et action de groupe sur $K\langle X \rangle$

Définition 3. Étant donnés K de caractéristique $\neq 2$, (A, ω) une K -algèbre pondérée et $\gamma \in K^*$, on appelle gamétisée de l'algèbre A au taux $1 - \gamma$, notée A_γ , l'espace vectoriel A muni de la structure de K -algèbre $(x, y) \mapsto (xy)_\gamma$ définie par :

$$(xy)_\gamma = \gamma xy + \frac{1 - \gamma}{2} (\omega(y)x + \omega(x)y).$$

L'origine du terme « gamétisée » est due à l'introduction dans l'algèbre (A, ω) d'une « dose au taux $1 - \gamma$ » de la loi d'algèbre $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\omega(y)x + \omega(x)y)$ qui est celle d'une algèbre gamétique.

On a : $(A_\gamma)_\delta = A_{\gamma\delta}$. La gamétisation préserve la pondération, les idempotents, les espaces $\text{Aut}(A)$, $\text{Der}(A)$, $\text{Nilp}(A)$ et les décompositions de Peirce par rapport à un idempotent.

Si Ω désigne la classe des algèbres pondérées, pour chaque $\gamma \in K^*$ on définit l'opérateur de gamétisation

$$\Gamma_\gamma : \Omega \rightarrow \Omega, \quad (A, \omega) \mapsto (A_\gamma, \omega)$$

on vérifie sans peine que $\Gamma_1 = \text{Id}_\Omega$, $\Gamma_\gamma \circ \Gamma_\delta = \Gamma_{\gamma\delta}$, par conséquent l'ensemble des opérateurs de gamétisation $\Gamma = \{\Gamma_\gamma; \gamma \in K^*\}$ est un groupe abélien.

Ensuite on obtient une action du groupe Γ sur l'algèbre $K\langle X \rangle$, en notant $\Gamma_\gamma(f) = f_\gamma$ et en définissant :

$$\begin{aligned}
(x_i)_\gamma &= x_i, \quad \text{quel que soit } x_i \in X, \\
(\alpha f + g)_\gamma &= \alpha f_\gamma + g_\gamma, \\
(fg)_\gamma &= \gamma(f_\gamma g_\gamma) + \frac{1-\gamma}{2}(g(\mathbf{1})f_\gamma + f(\mathbf{1})g_\gamma),
\end{aligned}$$

pour tout $\gamma \in K^*$, $f, g \in K\langle X \rangle$ et $\alpha \in K$.

Si (A, ω) est une algèbre qui vérifie une identité polynomiale f_A , il découle de ce qui précède que pour tout $\gamma \in K^*$ on a : $(f_A)_\gamma = f_{A_\gamma}$. Autrement dit, la gamétisée au taux $1 - \gamma$ d'une identité ω -polynomiale f_A vérifiée par A fournit une identité ω -polynomiale vérifiée par A_γ , elle est obtenue en remplaçant chaque monôme w composant f_A par w_γ .

Remarque 4. Afin de rendre plus explicite l'action du groupe Γ sur $K\langle X \rangle$ nous avons légèrement modifié la définition de la gamétisation par rapport à celle donnée à l'origine dans le travail [3]. Bien entendu, tous les résultats établis dans [3] sont conservés, leurs traductions dans la cadre de la présente définition s'obtient simplement en remarquant que l'opérateur de gamétisation défini à la remarque 9 de [3] est $\mathcal{O}_\gamma = \Gamma_{1-\gamma}$.

4. Polynômes invariants sous gamétisation

4.1. Définitions

Lemme 5. Pour tout entier $d \geq 2$ et pour tout $w_{d,i} \in \mathfrak{M}_d(X)$ on a

$$(w_{d,i})_\gamma = \gamma^{d-1} w_{d,i} + \sum_{k=1}^{d-1} \sum_{j=1}^{c_k} \gamma^{k-1} \beta_{k,j}^{d,i} w_{k,j}$$

et

$$(w_{d,i})_\gamma(\mathbf{1}) = w_{d,i}(\mathbf{1}) = 1$$

où $\beta_{k,j}^{d,i}$ est un polynôme en γ .

Démonstration. Par récurrence sur d . Dans le cas $d = 2$ on a $(x_i x_j)_\gamma = \gamma x_i x_j + \frac{1-\gamma}{2} x_i + \frac{1-\gamma}{2} x_j$ et $(x_i x_j)_\gamma(\mathbf{1}, 1) = 1$. Si le résultat est vrai quel que soit $2 \leq k \leq d$, soit $w_{d+1,i} \in \mathfrak{M}_{d+1}(X)$ il existe $w_{r,j}$ et $w_{s,k}$ avec $1 \leq r, s \leq d$ tels que $w_{d+1,i} = w_{r,j} w_{s,k}$ d'où

$$(w_{d+1,i})_\gamma = (w_{r,j} w_{s,k})_\gamma = \gamma(w_{r,j})_\gamma (w_{s,k})_\gamma + \frac{1-\gamma}{2}((w_{r,j})_\gamma + (w_{s,k})_\gamma)$$

en se servant de l'hypothèse de récurrence on déduit sans difficulté le résultat. \square

Il en découle immédiatement les deux corollaires suivants.

Corollaire 6. Quel que soit $f \in K\langle X \rangle$, on a $f_\gamma(\mathbf{1}) = f(\mathbf{1})$.

Remarque 7. En s'appuyant sur ce résultat on obtient la méthode suivante qui facilite les calculs de gamétisation des éléments de $K\langle X \rangle$. On considère l'algèbre $K\langle X \rangle^e = K\langle X \rangle \oplus Ke$ obtenue en adjoignant

à $K\langle X \rangle$ un élément e nilpotent, neutre à gauche et à droite dans $K\langle X \rangle$ et en définissant sur $K\langle X \rangle^e$ le produit

$$f * g = \frac{1}{\gamma} \left(\gamma f + \frac{1-\gamma}{2} f(\mathbf{1})e \right) \left(\gamma g + \frac{1-\gamma}{2} g(\mathbf{1})e \right).$$

Avec le corollaire 6 on voit que pour tout $f, g \in K\langle X \rangle$ on a $(fg)_\gamma = f_\gamma * g_\gamma$. Par exemple, pour calculer la gamétisée de $(xy)(zt)$ on fait

$$\begin{aligned} ((xy)(zt))_\gamma &= (x * y) * (z * t) \\ &= \left(\gamma xy + \frac{1-\gamma}{2} (x+y) \right) * \left(\gamma zt + \frac{1-\gamma}{2} (z+t) \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\gamma^2 xy + \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} (x+y) + \frac{1-\gamma}{2} e \right) \left(\gamma^2 zt + \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} (z+t) + \frac{1-\gamma}{2} e \right) \\ &= \gamma^3 (xy)(zt) + \gamma^2 \frac{1-\gamma}{2} ((xy)z + (xy)t + x(zt) + y(zt)) \\ &\quad + \gamma \left(\frac{1-\gamma}{2} \right)^2 (xz + xt + yz + yt) + \gamma \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) (xy + zt) \\ &\quad + \left(\frac{1-\gamma}{2} \right)^2 (x + y + z + t). \end{aligned}$$

Corollaire 8. Si f_n est le polynôme directeur de $f \in K\langle X \rangle$ alors $\gamma^{|f|-1} f_n$ est le polynôme directeur de f_γ .

La définition suivante découle de ce résultat.

Définition 9. On dit qu'un polynôme $f \in K\langle X \rangle$ est :

- invariant sous Γ_γ ou Γ_γ -invariant, si $\gamma \neq 1$ et $f_\gamma = \gamma^{|f|-1} f$,
- invariant universel ou Γ -invariant s'il est Γ_γ -invariant quel que soit $\gamma \in K^*$.

Il en résulte que si f est Γ_γ -invariante et si A est une algèbre vérifiant f alors A vérifie aussi l'identité f_γ . Il est aussi clair que si $f \in K\langle X \rangle$ est Γ_γ -invariant (ou Γ -invariant) alors λf est Γ_γ -invariant (ou Γ -invariant) quel que soit $\lambda \in K^*$, mais de plus on a

Proposition 10. Si $f, g \in K\langle X \rangle$ tels que $f(\mathbf{1}) = g(\mathbf{1}) = 0$ sont Γ_γ -invariants (resp. Γ -invariants), alors fg et $xf - \frac{1}{2}f$ sont Γ_γ -invariants (resp. Γ -invariants). Si de plus, f et g sont de même degré alors pour tout $\alpha, \beta \in K$, $\alpha f + \beta g$ est Γ_γ -invariant (resp. Γ -invariant).

Démonstration. En effet, on a $(fg)_\gamma = \gamma f_\gamma g_\gamma = \gamma^{|f|+|g|-1} fg = \gamma^{|fg|-1} fg$ et aussi $(xf - \frac{1}{2}f)_\gamma = \gamma xf_\gamma + \frac{1-\gamma}{2} f_\gamma - \frac{1}{2} f_\gamma = \gamma (xf_\gamma - \frac{1}{2} f_\gamma) = \gamma^{|f|} (xf - \frac{1}{2} f)$. Et si $|f| = |g|$ on a $(\alpha f + \beta g)_\gamma = \alpha f_\gamma + \beta g_\gamma = \gamma^{|f|-1} (\alpha f + \beta g)$. \square

4.2. Les polynômes Γ -invariants de $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$

Dans ce paragraphe on détermine d'abord les train polynômes à gauche et à droite Γ -invariants qui servent à construire les polynômes Γ -invariants de $K\langle X \rangle$.

Théorème 11. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $f_n \in K\langle X \rangle_n$, il existe, à homothétie près, un unique $f \in K\langle X \rangle$ de polynôme directeur f_n qui est Γ -invariant.

Démonstration. Pour tout entier $p \geq 2$ et $1 \leq j \leq c_p$, en vertu du lemme 5 on a

$$(w_{p,j})_\gamma = \gamma^{p-1} w_{p,j} + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{c_k} \gamma^{k-1} \beta_{k,i}^{p,j} w_{k,i}.$$

Soit $f = \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^{c_p} \alpha_{pj} w_{p,j}$ de polynôme directeur $f_n = \sum_{i=1}^{c_n} \alpha_{ni} w_{n,i}$, alors

$$\gamma^{n-1} f = \gamma^{n-1} \sum_{i=1}^{c_n} \alpha_{ni} w_{n,i} + \gamma^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{c_k} \alpha_{ki} w_{k,i}$$

et

$$\begin{aligned} f_\gamma &= \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^{c_p} \gamma^{p-1} \alpha_{pj} w_{p,j} + \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^{c_p} \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{c_k} \gamma^{k-1} \alpha_{pj} \beta_{k,i}^{p,j} w_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{c_k} \gamma^{k-1} \alpha_{ki} w_{k,i} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{c_k} \left(\sum_{p=k+1}^n \sum_{j=1}^{c_p} \gamma^{k-1} \alpha_{pj} \beta_{k,i}^{p,j} \right) w_{k,i} \\ &= \gamma^{n-1} \sum_{i=1}^{c_n} \alpha_{ni} w_{n,i} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{c_k} \gamma^{k-1} \left(\alpha_{ki} + \sum_{p=k+1}^n \sum_{j=1}^{c_p} \alpha_{pj} \beta_{k,i}^{p,j} \right) w_{k,i} \end{aligned}$$

on en déduit que $f_\gamma = \gamma^{n-1} f$ si et seulement si pour tout $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq i \leq c_k$, les $N = \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ scalaires α_{ki} sont solutions du système des N équations

$$(\gamma^{n-k} - 1) \alpha_{ki} - \sum_{p=k+1}^{n-1} \sum_{j=1}^{c_p} \alpha_{pj} \beta_{k,i}^{p,j} = \sum_{j=1}^{c_n} \alpha_{nj} \beta_{k,i}^{n,j} \quad (1)$$

or en ordonnant lexicographiquement les inconnues α_{ki} , ce système est triangulaire supérieur de déterminant $\Delta = \prod_{k=1}^{n-1} (\gamma^{n-k} - 1)^{c_k}$.

Par conséquent si γ n'est pas une racine de l'unité d'ordre $\leq n-1$ on a $\Delta \neq 0$ et le système (1) admet une unique solution f invariante sous Γ_γ de polynôme directeur $f_n = \sum_{i=1}^{c_n} \alpha_{ni} w_{n,i}$. Il en résulte que le sous-espace $\ker(\Gamma_\gamma - \gamma^{n-1} \text{Id})$ de l'espace $\bigoplus_{d \leq n} K\langle X \rangle_d$ est de dimension 1 engendré par f . Or pour tout $\delta \in K^*$ on a $\Gamma_\delta(f_\gamma) = \Gamma_\gamma(\delta f) = \Gamma_\gamma(f_\delta)$ et $\Gamma_\delta(f_\gamma) = \Gamma_\delta(\gamma^{n-1} f) = \gamma^{n-1} f_\delta$ donc le polynôme f_δ est Γ_γ -invariant, et d'après ce que l'on vient de voir, il existe $\lambda \in K$ tel que $f_\delta = \lambda f$, mais d'après le corollaire 8, f_δ a pour polynôme directeur $\delta^{n-1} f_n$ par conséquent on a $\lambda = \delta^{n-1}$ et donc $f_\delta = \delta^{n-1} f$, autrement dit f est Γ -invariant. \square

Pour les deux propositions suivantes on suppose que $\text{card}(X) = 1$ et on pose $X = \{x\}$. Pour tout entier $k \geq 1$ on définit les puissances principales à gauche par $^1x = x$ et $^{k+1}x = x(^kx)$ et on note $K[*x]$ le sous-espace vectoriel de $K\langle x \rangle$ engendré par $\{^kx; k \geq 1\}$. On appelle train polynôme à gauche tout $T \in K[*x]$ tel que $T(1) = 0$. Pour simplifier les écritures on adjoit à $K[*x]$ l'élément unité $^0x = 1$, on note $K[*x]^\sharp$ le sous-espace vectoriel de $K\langle x \rangle$ engendré par $\{^kx; k \geq 0\}$, il résulte aussitôt de la définition que pour tout train polynôme T il existe $\bar{T} \in K[*x]^\sharp$ tel que $T(x) = x((x-1)\bar{T}(x))$. Si on introduit l'application linéaire $L_x : K[*x] \rightarrow K[*x]$, $f \mapsto xf$ d'après ce qu'on vient de dire $T \in K[*x]$

est un train polynôme à gauche si et seulement si il existe $\bar{T} \in K[*x]^\sharp$ tel que $T(x) = (L_x - Id)\bar{T}(L_x)x$. On définit de manière analogue les puissances principales à droite $x^1 = x$, $x^{k+1} = x^k x$ et les train polynômes à droite, éléments de $K[x^*]$ l'espace engendré par $\{x^k; k \geq 1\}$.

Remarque 12. Dans la suite, pour alléger les écritures on notera $T(x) = x \cdot (x-1)\bar{T}(x)$ pour $T(x) = x((x-1)\bar{T}(x))$ et $\bar{T}(x)(x-1) \cdot x$ pour $(\bar{T}(x)(x-1))x$.

Proposition 13. La gamétisation d'un train polynôme à gauche $T(x) = x \cdot (x-1)\bar{T}(x)$ est le train polynôme à gauche $T_\gamma(x) = \gamma x \cdot (x-1)\bar{T}(\gamma x + \frac{1-\gamma}{2})$.

Démonstration. Soit $\bar{T}(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_k ({}^k x)$ on a donc

$$T(x) = (L_x - Id) \circ \sum_{k=0}^m \alpha_k L_x^k x = \sum_{k=0}^m \alpha_k L_x^k (x^2 - x).$$

Or on montre aisément que pour tout $f \in K[*x]$ tel que $f(1) = 0$ on a

$$\Gamma_\gamma \circ L_x^k f = \Gamma_\gamma \circ L_x (L_x^{k-1} f) = \left(\gamma L_x + \frac{1-\gamma}{2} Id \right) (\Gamma_\gamma \circ L_x^{k-1} f),$$

on en déduit

$$\Gamma_\gamma \circ L_x^k f = \left(\gamma L_x + \frac{1-\gamma}{2} Id \right)^k f_\gamma,$$

et comme $(x^2 - x)_\gamma = \gamma(x^2 - x)$, on a

$$T(x)_\gamma = \gamma \sum_{k=0}^m \alpha_k \left(\gamma L_x + \frac{1-\gamma}{2} Id \right)^k (x^2 - x),$$

autrement dit $T(x)_\gamma = \gamma(L_x - Id)\bar{T}(\gamma L_x + \frac{1-\gamma}{2} Id)x$. \square

Proposition 14. Les train polynômes à gauche Γ -invariants sont :

$$\lambda x, \quad \lambda(x^2 - x) \quad \text{et} \quad \lambda x \cdot (x-1) \left(x - \frac{1}{2} \right)^{n-2} \quad \text{avec } n \geq 3, \lambda \in K \setminus \{0\};$$

et les train polynômes à droites Γ -invariants sont :

$$\lambda x, \quad \lambda(x^2 - x) \quad \text{et} \quad \lambda \left(x - \frac{1}{2} \right)^{n-2} (x-1) \cdot x \quad \text{où } n \geq 3, \lambda \in K \setminus \{0\}.$$

Démonstration. Résulte immédiatement de la proposition 13 et du théorème 11. \square

Désormais on revient à $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit $Y = \{x_i^p, x_i^p; p \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$, on définit l'isomorphisme canonique de magmas

$$C : \mathfrak{M}(X) \rightarrow \mathfrak{M}(Y),$$

$$w \mapsto \begin{cases} {}^p x_i & \text{si } w = L_{x_i}^{p-1}(x_i), \quad p \geq 1, \\ x_i^p & \text{si } w = R_{x_i}^{p-1}(x_i), \quad p \geq 1 \end{cases}$$

autrement dit l'application C condense l'écriture des monômes.

On définit ensuite sur $\mathfrak{M}(Y) \setminus X$, le morphisme de magmas

$$S : \mathfrak{M}(Y) \setminus X \rightarrow K\langle X \rangle$$

par

$$S(x_i x_j) = x_i x_j - \frac{1}{2} x_i - \frac{1}{2} x_j,$$

$$S(x_i^p) = \left(R_{x_i} - \frac{1}{2} id \right)^{p-2} (x_i^2 - x_i), \quad p \geq 2,$$

$$S({}^p x_i) = \left(L_{x_i} - \frac{1}{2} id \right)^{p-2} (x_i^2 - x_i), \quad p \geq 2,$$

et pour tout $w \in \mathfrak{M}(Y) \setminus X$,

$$S(x_i w) = \left(L_{x_i} - \frac{1}{2} id \right) S(w),$$

$$S(w x_i) = \left(R_{x_i} - \frac{1}{2} id \right) S(w).$$

Théorème 15. Soit $f_n \in K\langle X \rangle$, $f_n = \sum_{i=1}^{c_n} \alpha_i w_{n,i}$ tel que $n \geq 2$, alors les polynômes Γ -invariants de polynômes directeur f_n sont $\lambda \sum_{i=1}^{c_n} \alpha_i SC(w_{n,i})$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiates des propositions 10 et 14 et du théorème 11. \square

Remarque 16. Il découle de ce théorème que les polynômes Γ -invariants ne sont jamais homogènes.

Corollaire 17. Si $f \in K\langle X \rangle$ de degré ≥ 2 est Γ -invariant alors $f(\mathbf{1}) = 0$.

Démonstration. Soit $f \in K\langle X \rangle$ de polynôme directeur $f_n = \sum_{i=1}^{c_n} \alpha_i w_{n,i}$ avec $n \geq 2$, on a $SC(w_{n,i})(\mathbf{1}) = 0$ donc $f_\gamma(\mathbf{1}) = 0$ et par suite pour tout $\gamma \in K^*$ on a $\gamma^{n-1} f(\mathbf{1}) = 0$. \square

Illustrons le théorème 15 par quelques exemples.

Exemple 18. Les polynômes Γ -invariants de polynôme directeur $\alpha x_1(x_2^3) + \beta({}^3 x_1)x_2 + \gamma x_1^2 x_2^2$ sont obtenus en développant $\lambda[\alpha SC(x_1(x_2^3)) + \beta SC({}^3 x_1)x_2 + \gamma SC(x_1^2 x_2^2)]$, or

$$\begin{aligned} SC(x_1(x_2^3)) &= \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) \left[\left(x_2 - \frac{1}{2} \right) (x_2 - 1) \cdot x_2 \right] \\ &= x_1(x_2^3) - \frac{1}{2} x_2^3 - \frac{3}{2} x_1 x_2^2 + \frac{3}{4} x_2^2 + \frac{1}{2} x_1 x_2 - \frac{1}{4} x_2 \end{aligned}$$

de même

$$SC((^3x_1)x_2) = (^3x_1)x_2 - \frac{1}{2}(^3x_1) - \frac{3}{2}x_1^2x_2 + \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{4}x_1$$

et

$$SC(x_1^2x_2^2) = (x_1^2 - x_1)(x_2^2 - x_2) = x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_1x_2.$$

Un autre exemple, les polynômes Γ -invariants de polynôme directeur $(x^2x^3)x^2$ sont donnés par le développement de $\lambda[(x^2 - x)((x - \frac{1}{2})(x^2 - x))](x^2 - x)$, ce sont donc

$$\lambda \left[(x^2x^3)x^2 - (x^2x^3)x - \frac{3}{2}(x^2x^2)x^2 - 4xx^2 + \frac{3}{2}(x^2x^2)x \right. \\ \left. + \frac{1}{2}x^3x^2 + \frac{3}{2}(^3xx^2) + 4xx - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}(^3xx) - \frac{1}{2}x^2x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right].$$

4.3. Les polynômes Γ_γ -invariants de $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$

L'utilisation des polynômes Γ -invariants permet de déterminer facilement les polynômes Γ_γ -invariants. A tout élément $w_{k,i}$ de la base canonique de $\mathfrak{M}(X)$ on associe

$$\tilde{w}_{k,i} = \begin{cases} x_i & \text{si } k = 1, \\ SC(w_{k,i}) & \text{si } k \geq 2, \end{cases}$$

d'après le théorème 15, \tilde{w}_{ki} est Γ -invariant de polynôme directeur w_{ki} et donc l'ensemble $\{\tilde{w}_{k,i}; k \geq 1, 1 \leq i \leq c_k\}$ est une base de $K\langle X \rangle$.

Remarquons tout d'abord que

Proposition 19. Si $\sum_{i=1}^{c_d} \alpha_i w_{d,i}$ est le polynôme directeur de $f \in K\langle X \rangle$, alors dans la base $(\tilde{w}_{k,i})_{k,i}$ le polynôme directeur de f est $\sum_{i=1}^{c_d} \alpha_i \tilde{w}_{d,i}$.

Démonstration. Dans $K\langle X \rangle^\sharp$ on a $x^i = \sum_{k=0}^i \frac{1}{2^{i-k}} \binom{i}{k} (x - \frac{1}{2})^k$, on en déduit que

$$x^{i+2} - x^{i+1} = \sum_{k=0}^i \frac{1}{2^{i-k}} \binom{i}{k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k (x-1) \cdot x$$

alors pour $p \geq 2$ on a

$$x^p - x = \sum_{i=0}^{p-2} (x^{i+2} - x^{i+1}) = \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{k=0}^i \frac{1}{2^{i-k}} \binom{i}{k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k (x-1) \cdot x \\ = \sum_{k=0}^{p-2} \left(\sum_{i=0}^{p-k-2} \frac{1}{2^i} \binom{k+i}{k} \right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^k (x-1) \cdot x.$$

On a donc

$$x^p = \sum_{k=0}^{p-2} \left(\sum_{i=0}^{p-k-2} \frac{1}{2^i} \binom{k+i}{k} \right) S(x^{k+2}) + x$$

et de même

$$p_X = \sum_{k=0}^{p-2} \left(\sum_{p=0}^{p-k-2} \frac{1}{2^i} \binom{k+i}{k} \right) S(x^{k+2}) + x.$$

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, en posant $Y = \{^p x_i, x_i^p; p \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ et en définissant le morphisme de magma $B : \mathfrak{M}(Y) \rightarrow K\langle X \rangle$ par

$$B(x_i) = x_i - \frac{1}{2}$$

et pour $p \geq 2$

$$\begin{aligned} B(^p x_i) &= \sum_{k=0}^{p-2} \left(\sum_{i=0}^{p-k-2} \frac{1}{2^i} \binom{k+i}{k} \right) S(x^{k+2}) + x, \\ B(x_i^p) &= \sum_{k=0}^{p-2} \left(\sum_{i=0}^{p-k-2} \frac{1}{2^i} \binom{k+i}{k} \right) S(x^{k+2}) + x \end{aligned}$$

on obtient le morphisme $BC : \mathfrak{M}(X) \rightarrow K\langle X \rangle$ qui permet d'exprimer le monôme $w_{k,i}$ en fonction de $\tilde{w}_{l,j}$ avec $1 \leq l \leq k$ et $1 \leq j \leq c_l$. En remarquant que $w_{k,i} = \tilde{w}_{k,i} + \tilde{w}$ où $\tilde{w} \in \text{Lin}\{\tilde{w}_{l,j}; 1 \leq l < j, 1 \leq j \leq c_l\}$, on a le résultat. \square

Nous pouvons expliciter les polynômes $f \in K\langle X \rangle$ qui sont Γ_γ -invariants, il y a deux cas selon que $f(\mathbf{1}) \neq 0$ ou $f(\mathbf{1}) = 0$.

Proposition 20. Pour tout entier $d \geq 2$ et tout $f_d \in K\langle X \rangle_d$, il existe un polynôme $f \in K\langle X \rangle$ de polynôme directeur f_d tel que $f(\mathbf{1}) \neq 0$, qui est Γ_γ -invariant si et seulement si γ est une racine de l'unité dont l'ordre divise $d-1$. Si p est l'ordre de γ , l'ensemble de ces polynômes est la famille paramétrée par $\sum_{k=1}^q c_{d-kp}$ paramètres :

$$\left\{ \lambda \left[\sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^{c_{d-kp}} \lambda_{d-kp,i} \tilde{w}_{d-kp,i} \right]; \lambda_{d-kp,i} \in K, \sum_{i=1}^n \lambda_{1,i} \neq 0 \right\} \quad \text{où } q = \frac{d-1}{p}.$$

Démonstration. Soit $f \in K\langle X \rangle$ de polynôme directeur f_d tel que $f(\mathbf{1}) \neq 0$. Montrons que si f est Γ_γ -invariant alors γ est une racine de l'unité dont l'ordre divise $d-1$. Soit $f(\mathbf{1}) = \lambda \neq 0$, en posant $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda x_1$ on a $g(\mathbf{1}) = 0$ alors d'après le corollaire 6 on a $f_\gamma(\mathbf{1}) = g_\gamma(\mathbf{1}) + \lambda = \lambda$ mais alors $\lambda = \gamma^{d-1} f(\mathbf{1}) = \gamma^{d-1} \lambda$ d'où $\gamma^{d-1} = 1$, on en déduit le résultat. Réciproquement, si γ est une racine de l'unité dont l'ordre p divise $d-1$, soit $f = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^{c_k} \alpha_{ki} \tilde{w}_{k,i}$ la décomposition de f dans la base $\{\tilde{w}_{k,i}; k \geq 1, 1 \leq i \leq c_k\}$, d'après la proposition 19 on a $f_d = \sum_{i=1}^{c_d} \alpha_{di} \tilde{w}_{d,i}$, comme $\tilde{w}_{k,i}(\mathbf{1}) = 0$ pour tout $k \geq 2$ et $\tilde{w}_{1,i}(\mathbf{1}) = 1$ on a $f(\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^n \alpha_{1i}$. La condition $f_\gamma = \gamma^{d-1} f$ se traduit par le système de $N = \sum_{k=1}^{d-1} c_k$ équations : $(\gamma^{d-k} - 1)\alpha_{ki} = 0$ avec $1 \leq k \leq d-1, 1 \leq i \leq c_k$ dont le

déterminant est $\prod_{k=1}^{d-1} (\gamma^{d-k} - 1)^{c_k} = 0$, par conséquent ce système est de rang $< N$, il admet donc des solutions qui appartiennent au sous-espace engendré par $\{\tilde{w}_{d-kp,i}; 1 \leq k \leq q, 1 \leq i \leq c_{d-kp}\}$, où on a posé $q = \frac{d-1}{p}$. \square

Proposition 21. Pour tout entier $d \geq 2$ et tout $f_d \in K\langle X \rangle_n$, il existe un polynôme $f \in K\langle X \rangle$ de polynôme directeur f_d tel que $f(\mathbf{1}) = 0$, qui est Γ_γ -invariant et n'est pas Γ -invariant si et seulement si $\gamma \neq 1$ est une racine de l'unité d'ordre $\leq d-1$. Si p est l'ordre de γ , l'ensemble de ces polynômes est la famille paramétrée par $\sum_{k=1}^q c_{d-kp}$ paramètres :

$$\left\{ \lambda \left[\sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^{c_{d-kp}} \lambda_{d-kp,i} \tilde{w}_{d-kp,i} \right]; \lambda_{d-kp,i} \in K \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_{1,i} = 0 \text{ si } p \mid d-1 \right\},$$

où $q = \lfloor \frac{d-1}{p} \rfloor$.

Démonstration. Soit $f \in K\langle X \rangle$ de polynôme directeur f_d tel que $f(\mathbf{1}) = 0$. Soit $f = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^{c_k} \alpha_{ki} \tilde{w}_{k,i}$ la décomposition de f dans la base $\{\tilde{w}_{k,i}; k \geq 1, 1 \leq i \leq c_k\}$, de $f(\mathbf{1}) = 0$ on déduit que $\sum_{i=1}^n \alpha_{1i} = 0$. La condition $f_\gamma = \gamma^{d-1} f$ se traduit par le système de $N = \sum_{k=1}^{d-1} c_k$ équations :

$$(\gamma^{d-k} - 1) \alpha_{ki} = 0 \quad (1 \leq k \leq d-1, 1 \leq i \leq c_k) \quad (2)$$

dont le déterminant est $\Delta = \prod_{k=1}^{d-1} (\gamma^{d-k} - 1)^{c_k}$. On en déduit que si f est Γ_γ -invariant et non Γ -invariant on a $\Delta = 0$ et donc $\gamma \neq 1$ est une racine de l'unité d'ordre $\leq d-1$, en effet si $\Delta \neq 0$ on aurait $\alpha_{ki} = 0$ quel que soit $1 \leq k \leq d-1$ et $1 \leq i \leq c_k$ par conséquent $f = \sum_{i=1}^{c_d} \alpha_{di} \tilde{w}_{n,i}$ mais f serait Γ -invariant. Réciproquement, si $\gamma \neq 1$ est une racine de l'unité d'ordre $p \leq d-1$ alors le système (2) est de rang $< N$, il admet donc des solutions qui appartiennent au sous-espace engendré par $\{\tilde{w}_{d-kp,i}; 1 \leq k \leq q, 1 \leq i \leq c_{d-kp}\}$, où $q = \lfloor \frac{d-1}{p} \rfloor$. \square

Remerciements

We thank the reviewer for his careful reading and comments.

Références

- [1] I.M.H. Etherington, Commutative train algebras of ranks 2 and 3, J. Lond. Math. Soc. 15 (1940) 136–149; Corrigendum: J. Lond. Math. Soc. 20 (1945) 238.
- [2] J. Lopez-Sanchez, E. Rodriguez, On train algebras of rank 4, Comm. Algebra 24 (1996) 439–445.
- [3] C. Mallol, R. Varro, R. Benavides, Gamétisation d'algèbres pondérées, J. Algebra 261 (2003) 1–18.
- [4] C. Mallol, R. Varro, Sur la gamétisation et le rétrocroisement, Algebras Groups Geom. 22 (2005) 49–60.
- [5] M. Nourigat, R. Varro, Étude des ω -PI algèbres commutatives de degré 4 : I. Algèbres non barycentriques non invariantes par gamétisation, Comm. Algebra 39 (11) (2011) 3956–3968.
- [6] M. Nourigat, R. Varro, Étude des ω -PI algèbres commutatives de degré 4 : II. Algèbres non barycentriques invariantes par gamétisation, Comm. Algebra 39 (8) (2011) 2764–2778.
- [7] M. Nourigat, R. Varro, Étude des ω -PI algèbres commutatives de degré 4 : III. Algèbres barycentriques invariantes par gamétisation, accepté à Comm. Algebra.
- [8] A. Wörz-Busekros, Algebras in Genetics, Lecture Notes in Biomath., vol. 36, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [9] K.A. Zhevlakov, A.M. Slin'ko, I.P. Shestakov, Rings that are Nearly Associative, Pure Appl. Math., vol. 104, Academic Press, New York, London, 1982.