Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
Journal of Algebra 290 (2005) 221–249
JOURNAL OF Algebra
www.elsevier.com/locate/jalgebra

Scindements de foncteurs composés

Alain Troesch

Équipe d'analyse algébrique, Institut de mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, 4, place Jussieu, 75005 Paris, France

Reçu le 4 juin 2002

Disponible sur Internet le 13 juin 2005

Communiqué par Michel Broué

Résumé

Cet article étudie un cas de décomposition naturelle de pléthysme. On travaille dans la catégorie des foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps premier $\mathbb{F}_p$. Une décomposition de la $n$ième puissance symétrique $S^n \circ B$ est établie pour tout foncteur B prenant ses valeurs dans les algèbres p-booléennes, c'est-à-dire dans les algèbres dont le produit vérifie : $x^p = x$. L'enveloppe injective du foncteur identité est un exemple d'un tel foncteur B. On applique ce résultat à des calculs de cohomologie des foncteurs qui apparaissent dans l'étude de la cohomologie des espaces d'Eilenberg–Mac Lane.

Abstract

Composite functors' splittings. A case of natural decomposition of plethysm is studied. We work within the category of functors between vector spaces over a prime field $\mathbb{F}_p$. The symmetric power $S^n \circ B$ of a functor B is shown to split when B takes p-boolean algebras values—these are algebras whose product satisfies $x^p = x$. The injective envelope of the identity functor takes such values. This is applied to functor cohomology computations, which are relevant to the study of the cohomology of Eilenberg–Mac Lane spaces.

Keywords: Functor categories; Taylor functors; Symmetric powers; Ext-groups

Adresse e-mail : troesch@math.jussieu.fr.

0021-8693/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jalgebra.2005.05.001

Introduction

Soit p un nombre premier. On note $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$, et $\mathcal{E}^f$ la catégorie des espaces vectoriels finis. Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}^f$ dans $\mathcal{E}$. Sont par exemple des objets de $\mathcal{F}$ le foncteur d'inclusion de $\mathcal{E}^f$ dans $\mathcal{E}$, noté Id, les puissances tensorielles $T^n(V) = V^{\otimes n}$, les puissances symétriques S^n (quotient de T^n par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par permutation des facteurs), les puissances divisées Γ^n (invariants de cette action), les puissances extérieures Λ^n, et le foncteur $I_{\mathbb{F}_p}$, défini par

$$I_{\mathbb{F}_p}(V) = \mathbb{F}_p^{V^*}.$$

Ce dernier foncteur est injectif [16, lemme 5.3.1], et s'écrit $I_{\mathbb{F}_p} = \mathbb{F}_p \oplus \overline{I_{\mathbb{F}_p}}$, où $\overline{I_{\mathbb{F}_p}}$ est l'enveloppe injective de Λ^1. Un autre exemple d'objet de $\mathcal{F}$ est le foncteur S^{p^∞}, limite directe du système $(S^{p^h} \to S^{p^{h+1}})_{h\geqslant 0}$, la flèche étant le morphisme de Frobenius $X \mapsto X^p$.

Soit $F \in \mathcal{F}$. On définit $\Delta F \in \mathcal{F}$ par

$$\Delta F(V) = \mathrm{Ker}\big(F(V \oplus \mathbb{F}_p) \to F(V)\big).$$

On dit que F est de *degré d'Eilenberg–Mac Lane* au plus n si $\Delta^{n+1}F = 0$. Un foncteur est *polynomial* s'il est de degré fini ; il est *analytique* s'il est limite directe de ses sous-foncteurs polynomiaux. On note $t_n(F)$ ($n$ième *foncteur de Taylor* de F) le plus grand sous-foncteur de F de degré au plus n. Ainsi, si F est analytique, F est la limite directe de ses foncteurs de Taylor. On obtient donc une filtration $(t_n(F))_{n\in\mathbb{N}}$ de F, appelée *filtration de Taylor*.

Soit B un objet de $\mathcal{F}$. On dit que ce foncteur est *p-booléen* s'il est muni d'un produit naturel vérifiant $x^p = x$. L'objet principal de cet article est de montrer que la filtration de Taylor de la puissance symétrique S^n se scinde après composition (à droite) par un foncteur p-booléen B (théorème 3 et corollaire 7). On montre aussi qu'il en est de même de la filtration de Taylor du foncteur $\overline{I_{\mathbb{F}_p}}$ (théorème 4 et corollaire 9). L'existence de tels scindements avait été signalée par J. Smith.

Le foncteur $\overline{I_{\mathbb{F}_p}}$ étant p-booléen, cela fournit des décompositions de $S^n \circ \overline{I_{\mathbb{F}_p}}$ et de $\overline{I_{\mathbb{F}_p}} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_p}}$. Cette dernière décomposition apparaît dans des travaux de Richter [15, théorème 7.1], basés sur des résultats de Pirashvili [13]. Le présent article, qui n'utilise pas la technologie de Pirashvili [13], étend donc le résultat de Richter à une classe plus vaste de foncteurs.

Un autre exemple est S^{p^∞}. Ce foncteur n'est pas p-booléen, car, si son produit (déduit du produit de l'algèbre symétrique) est commutatif et vérifie $x^p = x$, en revanche, il n'est pas associatif. Cependant, $S^{p^\infty}(V)$ est une *algèbre à niveau*, (c'est-à-dire vérifiant $(xy)(zt) = (xz)(yt)$ pour $p = 2$, et une relation similaire faisant intervenir p^2 termes pour $p > 2$). Cette propriété, plus faible que l'associativité, suffit pour obtenir les décompositions ci-dessus. Ainsi, on obtient des décompositions de $S^n \circ S^{p^\infty}$ et de $I_{\mathbb{F}_p} \circ S^{p^\infty}$.

La motivation essentielle de l'étude des scindements ci-dessus est l'application à des calculs d'extensions dans la catégorie $\mathcal{F}$, notamment des extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^d, S^n \circ S^m)$, apparaissant dans l'étude de la cohomologie des espaces d'Eilenberg–Mac Lane, *via* l'équivalence entre la catégorie des foncteurs analytiques et une catégorie quotient de la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod ([10], [16, théorème 5.2.6]).

Des premiers pas vers ce résultat ont été accomplis (à des fins différentes) par Breen [3, théorème 1.3], puis Franjou, Lannes et Schwartz [8, théorème 6.6 et corollaire 7.4], qui déterminent $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, S^n)$, et par Franjou, Friedlander, Scorichenko et Suslin [7, théorèmes 5.8 et 6.3] qui déterminent $\mathrm{Ext}^*(\Gamma^n, S^m)$. L'auteur s'est déjà intéressé à des extensions faisant intervenir des compositions, en déterminant les groupes $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, S^n \circ S^m)$, en caractéristique 2 [17–19]. Ce résultat a été obtenu ultérieurement par d'autres méthodes par Betley [1] et par Fresse.

Pour généraliser ce calcul à des puissances divisées plus élevées, la connaissance des extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^d, S^n \circ I)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^d, S^n \circ S^{p^\infty})$ s'avère très utile. Les décompositions obtenues dans cet article aident sans doute à obtenir ces extensions, ainsi que le montrent les quelques exemples développés à la fin de l'article : elles permettent par exemple de calculer très rapidement les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ B)$, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^\infty} \circ B)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, I_{\mathbb{F}_p} \circ B)$, généralisant ainsi le calcul de Betley [2] de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ I)$. On présente également quelques résultats concernant $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \Lambda^m \circ I_{\mathbb{F}_p})$.

L'article se découpe comme suit.

(1) Dans une première partie, on détermine les foncteurs de Taylor de S^n, et leurs quotients successifs, en vue d'obtenir une expression explicite de la décomposition de $S^n \circ B$.
(2) On donne ensuite quelques définitions et conventions d'écriture concernant les *foncteurs booléens*.
(3) La troisième partie est consacrée à la démonstration de la décomposition de $S^n \circ B$ (théorème 3).
(4) On démontre ensuite le scindement de $I_{\mathbb{F}_p} \circ B$ (théorème 4). Cette démonstration est indépendante de la partie précédente.
(5) La dernière partie est consacrée à des applications aux calculs d'extensions dans $\mathcal{F}$.

1. Foncteurs de Taylor de S^n

Pour déterminer les foncteurs de Taylor de S^n (théorème 2), on utilise la notion de *partitions p-adiques* d'un entier. Des propriétés combinatoires de ces objets ont été étudiées par Sellers, Gupta, ou encore, plus récemment, Latapy [11]. On énonce, pour commencer cette partie, quelques définitions et résultats élémentaires à ce sujet.

Soit n un entier positif. On rappelle qu'une partition de n est une suite décroissante d'entiers positifs ou nuls $\underline{\lambda} = (\lambda_i)_{n\geqslant 1}$ telle que $\sum_{n\geqslant 0} \lambda_i = n$. Seul un nombre fini de termes est non nul. On écrira alors $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$, où il est implicite que $\lambda_\ell \neq 0$. Un raffinement de $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ est une partition $\underline{\mu}$ telle qu'on retrouve la partition $\underline{\lambda}$ en regroupant convenablement les parts de $\underline{\mu}$: c'est une partition $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ telle qu'il existe une partition $(I_1, \dots, I_\ell)$ de l'ensemble $\{1, \dots, m\}$ vérifiant pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$:

$$\sum_{i\in I_j} \mu_i = \lambda_j.$$

On définit un ordre sur l'ensemble des partitions de n de la manière suivante : $\underline{\lambda} \leqslant \underline{\mu}$ si et seulement si $\underline{\mu}$ est un raffinement de $\underline{\lambda}$.

Définition 1. Une *partition p-adique* (ou *p-aire*) de n est une partition de n dont les parts sont des puissances de p.

L'ordre défini ci-dessus induit par restriction un ordre sur l'ensemble des partitions p-adique. Plus explicitement $\underline{\lambda} \leqslant \underline{\mu}$ si et seulement si $\underline{\mu}$ est obtenu de $\underline{\lambda}$ en répétant l'opération consistant à diviser une des parts p^i en p parts p^{i-1}. On trouvera dans [11, théorème 1] une preuve du théorème suivant :

Théorème 1. *L'ensemble partiellement ordonné des partitions p-adiques forme un treillis associatif.*

En particulier, étant donné deux partitions p-adiques $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$, il existe toujours un minimum $\min(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$, et un maximum $\max(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$. Le minimum ainsi obtenu est également le minimum dans l'ensemble de toutes les partitions de n :

Proposition 1. *Si $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ sont des partitions p-adiques de n, et si $\underline{\kappa}$ est une partition de n quelconque telle que $\underline{\kappa} \leqslant \underline{\lambda}$ et $\underline{\kappa} \leqslant \underline{\mu}$, alors $\underline{\kappa} \leqslant \min(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$. Ainsi, le minimum dans l'ensemble de toutes les partitions de deux partitions p-adiques existe, et est égal au minimum dans l'ensemble des partitions p-adiques.*

Démonstration. Pour une partition quelconque $\underline{\kappa}$ de n, on définit la partition p-adique $(\underline{\kappa})_p$ obtenue en décomposant toutes les parts selon leur développement p-adique. Par exemple, si $p = 2$, la part (7) va être coupée en $(4 + 2 + 1)$. Par définition, $\underline{\kappa} \leqslant (\underline{\kappa})_p$. Par ailleurs, $(\underline{\kappa})_p$ est la plus petite partition p-adique vérifiant cette inégalité. Ainsi, si $\underline{\kappa} \leqslant \underline{\lambda}$ et $\underline{\kappa} \leqslant \underline{\mu}$, alors $(\underline{\kappa})_p \leqslant \underline{\lambda}$ et $(\underline{\kappa})_p \leqslant \underline{\mu}$. Par conséquent, ces inégalités s'écrivant dans l'ensemble des partitions p-adiques, on en déduit que $\underline{\kappa} \leqslant (\underline{\kappa})_p \leqslant \min(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$. □

Remarquons maintenant qu'étant donnée une partition p-adique $\underline{\lambda}$, toutes les parts sont congrues à 1 modulo $p - 1$. Ainsi, n, égal à la somme des parts, est congru au nombre de parts modulo $p - 1$, c'est-à-dire à la longueur de la partition. On en déduit :

Proposition 2. *Soit $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ deux partitions p-adiques de n de longueurs respectives ℓ et m, telles que $\underline{\lambda} \leqslant \underline{\mu}$.*

- *Si $m - \ell < p - 1$, alors $m = \ell$ et $\underline{\lambda} = \underline{\mu}$.*
- *Si $m - \ell = p - 1$, alors il n'existe pas de partition p-adique $\underline{\kappa}$ telle que $\underline{\lambda} < \underline{\kappa} < \underline{\mu}$.*
- *Si $m - \ell > p - 1$, alors il existe une partition p-adique $\underline{\kappa}$ telle que $\underline{\lambda} < \underline{\kappa} < \underline{\mu}$.*

Autrement dit, toute chaîne maximale d'inégalités est une chaîne d'inégalités de hauteur $p - 1$ (la hauteur étant la différence des longueurs).

Définition 2. Soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_\ell)$ une partition p-adique de l'entier n. On désigne par $S(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ ou $S(\underline{\lambda})$, le sous-foncteur de S^n engendré par les éléments de la forme $x_1^{\lambda_1} \cdots x_\ell^{\lambda_\ell}$.

Proposition 3. *Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de V. La famille constituée des éléments $e_1^{n_1} \cdots e_d^{n_d}$ pour tout d-uplet $(n_1, \dots, n_d)$ d'entiers positifs ou nuls de somme n forme une base de $S^n(V)$. On obtient une base de $S(\underline{\lambda})(V)$ en considérant le sous-ensemble de cette base constitué des éléments tels que la partition $\{n_1, \dots, n_d\}$ (ni p-adique, ni ordonnée) soit raffinée par $\underline{\lambda}$.*

Soit $\underline{\lambda}$ une partition p-adique de n. On désigne par $\underline{\lambda}_>$ l'ensemble des partitions p-adiques de n strictement inférieures à $\underline{\lambda}$:

$$\underline{\lambda}_> = \{\underline{\mu} \mid \underline{\lambda} > \underline{\mu}\}.$$

De même, $\underline{\lambda}_\geqslant$ désigne l'ensemble des partitions p-adiques de n inférieures ou égales à $\underline{\lambda}$.

Les propositions 1 et 3 montrent directement la proposition suivante.

Proposition 4. *Soit $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ deux partitions p-adiques de n. Alors $S(\underline{\mu}) \subset S(\underline{\lambda})$ si et seulement si $\underline{\mu} \leqslant \underline{\lambda}$. Ainsi, $S(\underline{\mu}) \subsetneq S(\underline{\lambda})$ si et seulement si $\underline{\mu} \in \underline{\lambda}_>$.*

Proposition 5. *Soit $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ deux partitions p-adiques de n. Alors*

$$S(\underline{\lambda}) \cap S(\underline{\mu}) = S\big(\min(\underline{\lambda}, \underline{\mu})\big).$$

Démonstration. Comme les bases de $S(\underline{\lambda})$ et de $S(\underline{\mu})$ données dans la proposition 3 sont des sous-ensembles d'une même base de S^n, on obtient une base de $S(\underline{\mu}) \cap S(\underline{\lambda})$ en prenant l'intersection. Soit $e_1^{n_1} \cdots e_d^{n_d}$ un élément de cette intersection. Comme c'est un élément de la base de $S(\underline{\lambda})$, on a, d'après la proposition 3,

$$\{n_1, \dots, n_d\} \leqslant \underline{\lambda}.$$

De la même manière,

$$\{n_1, \dots, n_d\} \leqslant \underline{\mu}.$$

Par conséquent, on obtient, grâce à la proposition 1 :

$$\{n_1, \dots, n_d\} \leqslant \min(\underline{\lambda}, \underline{\mu}),$$

puis

$$e_1^{n_1} \cdots e_d^{n_d} \in S\big(\min(\underline{\lambda}, \underline{\mu})\big).$$

Cela montre l'inclusion $S(\underline{\lambda}) \cap S(\underline{\mu}) \subset S(\min(\underline{\lambda}, \underline{\mu}))$. L'inclusion réciproque est évidente par la proposition 4, du fait que $\min(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leqslant \underline{\lambda}$ et $\min(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leqslant \underline{\mu}$. □

Comme rappelé dans l'introduction, on dispose dans $\mathcal{F}$ d'une notion de degré, et de foncteurs de Taylor $t_n(F)$. On dit qu'un foncteur F de degré n est *homogène* si $t_{n-1}(F) = 0$. Tout foncteur simple est homogène, en particulier :

– la puissance extérieure Λ^n ;
– la puissance symétrique réduite $S^n_p(V) = S^n(V)/(x^p = 0)$ (pour la simplicité de ce foncteur, voir Carlisle et Kuhn [4] ; on peut aussi le montrer directement). Notons que si $p = 2$, $S^n_p = \Lambda^n$.

Étant donné un $(s+1)$-uplet $(\nu_0, \dots, \nu_s)$, on désignera par $S_p(\underline{\nu})$ le produit tensoriel $S_p(\underline{\nu}) = S_p^{\nu_0} \otimes \cdots \otimes S_p^{\nu_s}$. Si $p = 2$, puisque $S_2^k = \Lambda^k$, on écrira indifféremment $S_2(\underline{\nu})$ ou $\Lambda(\underline{\nu})$.

Théorème 2. *La filtration de Taylor du foncteur S^n est donnée par*

$$t_m\bigl(S^n\bigr) = \sum_{\underline{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)} S(\underline{\lambda}),$$

la somme étant prise sur les partitions p-adiques de n de longueur $\ell \leqslant m$. Les quotients successifs de cette filtration sont :

$$t_m\bigl(S^n\bigr)/t_{m-1}\bigl(S^n\bigr) = \bigoplus_{\substack{\underline{\nu}=(\nu_0,\dots,\nu_s)\\ \nu_0+\cdots+\nu_s=m\\ \nu_0 p^0+\cdots+\nu_s p^s=n}} S_p(\underline{\nu}).$$

Exemple 1. Le foncteur $t_n(S^n)$ est égal à $S(1, \dots, 1) = S^n$. Le foncteur $t_1(S^n)$ $(n = p^h)$ est égal à $S(p^h) = S^1$.

Soit $\underline{\lambda}$ une partition p-adique de n. On note $\nu_i(\underline{\lambda})$ le nombre de parts de taille p^i dans la partition $\underline{\lambda}$. On désigne par $\underline{\nu}(\underline{\lambda})$ la suite

$$\underline{\nu}(\underline{\lambda}) = \bigl(\nu_1(\underline{\lambda}), \dots, \nu_s(\underline{\lambda})\bigr).$$

Dans cette écriture, il est implicite que p^s est la plus grande part de $\underline{\lambda}$. La somme $\nu_0(\underline{\lambda}) + \cdots + \nu_s(\underline{\lambda})$ est le nombre total de parts de $\underline{\lambda}$. Inversement, étant donné une suite $\underline{\nu} = (\nu_0, \dots, \nu_s)$ telle que $\sum \nu_i p^i = n$, on désigne par $\underline{\lambda}(\underline{\nu})$ la partition p-adique constituée pour tout i de ν_i parts de taille p^i.

Démonstration du théorème 2 (*première partie*). Soit $t_m(S^n)$ le plus grand sous-foncteur de S^n de degré au plus m, et soit $t'_m(S^n)$ le sous-foncteur de S^n défini par

$$t'_m\bigl(S^n\bigr) = \sum_{\substack{\underline{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)\\ \ell\leqslant m}} S(\underline{\lambda}).$$

Il s'agit de montrer que $t'_m(S^n)$ est égal à $t_m(S^n)$.

Soit $\underline{\lambda}$ une partition p-adique de n, et $\underline{\nu} = \underline{\nu}(\underline{\lambda})$. Alors $S(\underline{\lambda})$ est l'image du morphisme $\alpha : S^{\nu_0} \otimes \cdots \otimes S^{\nu_s} \to S^n$ défini par

$$\alpha(X_0 \otimes \cdots \otimes X_s) = X_0^{p^0} \cdots X_s^{p^s}, \tag{1}$$

où X_i est un élément de $S^{\nu_i}(V)$. On en déduit en particulier l'existence d'un morphisme surjectif $S^{\nu_0} \otimes \cdots \otimes S^{\nu_s} \to S(\underline{\lambda})$. Le degré d'Eilenberg–Mac Lane de $S^{\nu_0} \otimes \cdots \otimes S^{\nu_s}$ est égal à $\nu_0 + \cdots + \nu_s$, c'est-à-dire à la longueur de la partition $\underline{\lambda}$. Ainsi, pour toute partition p-adique $\underline{\lambda}$ de longueur ℓ, $\deg S(\underline{\lambda}) \leqslant \ell$. En particulier, le degré de $t'_m(S^n)$ est au plus m, d'où $t'_m(S^n) \subset t_m(S^n)$. $\square$

Lemme 1. *Soit $\underline{\lambda}$ une partition p-adique de n. Alors*

$$S(\underline{\lambda}) \Big/ \sum_{\underline{\mu} \in \underline{\lambda}_>} S(\underline{\mu}) = S_p\big(\underline{\nu}(\underline{\lambda})\big).$$

Démonstration. On note $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ et $\underline{\nu}(\underline{\lambda}) = (\nu_1, \ldots, \nu_s)$. Soit α le morphisme surjectif $S^{\nu_0} \otimes \cdots \otimes S^{\nu_s} \to S(\underline{\lambda})$ défini en (1). Si la classe de X_i est nulle dans $S_p^{\nu_i}$, alors $X_i = x^p Y_i$ (plus exactement, est une somme de tels éléments) et

$$\alpha(X_0 \otimes \cdots \otimes X_s) = X_0^{p^0} \cdots X_{i-1}^{p^{i-1}} x^{p^{i+1}} Y_i^{p^i} X_{i+1}^{p^{i+1}} \cdots X_s^{p^s}.$$

Soit $\underline{\mu}$ la partition p-adique de n telle que

$$\nu_j(\underline{\mu}) = \begin{cases} \nu_j, & \text{si } j \neq i, i+1, \\ \nu_i - p, & \text{si } j = i, \\ \nu_{i+1} + 1, & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

On déduit de ce qui précède que $\alpha(X_0 \otimes \cdots \otimes X_s)$ est un élément de $S(\underline{\mu})(V)$. On a évidemment $\underline{\mu} < \underline{\lambda}$. Le morphisme α passe donc au quotient et définit un morphisme surjectif (qu'on note aussi α) :

$$\alpha : S_p^{\nu_0} \otimes \cdots \otimes S_p^{\nu_s} \to S(\underline{\lambda}) \Big/ \sum_{\underline{\mu} \in \underline{\lambda}_>} S(\underline{\mu}). \tag{2}$$

Ce morphisme est aussi injectif. En effet, soit V un espace vectoriel de base $e_1, \ldots, e_d$. On obtient une base de $S_p^{\nu_i}$ en considérant les éléments $e_1^{n_{i,1}} \cdots e_d^{n_{i,d}}$, avec $n_{i,j} < p$ pour tout i, j, et $\sum_j n_{i,j} = \nu_i$. Soit

$$\bigotimes_{i=1}^{s} e_1^{n_{i,1}} \cdots e_d^{n_{i,d}}$$

un élément de la base ainsi obtenue de $S_p(\underline{\nu})$. L'image de cet élément par α est

$$e_1^{\sum n_{i,1} p^i} \cdots e_d^{\sum n_{i,d} p^i}. \tag{3}$$

Ceci est un élément de la base de $S(\underline{\lambda})$ décrite dans la proposition 3. Or, on quotiente par un sous-espace qui admet comme base un sous-ensemble de cette base. Il suffit donc, pour montrer l'injectivité de α, de montrer que l'élément (3) n'est pas un élément de ce sous-ensemble.

D'après les propositions 1 et 3, on obtient une base de $S(\underline{\lambda})(V)$ en considérant la famille d'éléments $e_1^{n_1} \cdots e_d^{n_d}$ pour toutes les partitions $(n_1, \ldots, n_d)$ telles que

$$(n_1, \ldots, n_d)_p \leqslant \underline{\lambda}$$

(notation définie dans la démonstration de la proposition 1). On observe que si $(n_1, \ldots, n_d)$ est la partition définie par $n_j = \sum_i n_{i,j} p^i$, alors

$$(n_1, \ldots, n_d)_p = \underline{\lambda},$$

car tous les entiers $n_{i,j}$ sont strictement plus petits que p. Cela achève la démonstration. $\square$

Corollaire 1. *Soit $\underline{\lambda}$ une partition p-adique de n de longueur m. Alors $S(\underline{\lambda})$ est de degré exactement m, et*

$$t_{m-1} S(\underline{\lambda}) = \sum_{\underline{\mu} \in \underline{\lambda}_>} S(\underline{\mu}).$$

Démonstration. Le lemme 1 permet d'obtenir une suite exacte courte

$$0 \to \sum_{\underline{\mu} \in \underline{\lambda}_>} S(\underline{\mu}) \to S(\underline{\lambda}) \to S_p\big(\underline{\nu}(\underline{\lambda})\big) \to 0.$$

Le terme de gauche est inclus dans $t'_{m-1}(S^n)$, donc dans $t_{m-1}(S^n)$, d'après la première partie de la démonstration du théorème 2. Il est donc de degré au plus $m-1$. Comme le terme de droite est de degré m, le degré de $S(\underline{\lambda})$ est alors exactement m. De plus, le terme de droite est *homogène* (en tant que produit tensoriel de foncteurs simples) de degré m. Par conséquent, il n'existe pas de plus grand sous-foncteur de degré $m-1$ de $S(\underline{\lambda})$ que le terme de gauche, et ce dernier est donc égal à $t_{m-1} S(\underline{\lambda})$. $\square$

Démonstration du théorème 2 (*deuxième partie*). Pour montrer que $t_m(S^n) = t'_m(S^n)$, on fait une récurrence décroissante sur m. Pour $m = n$, $t'_n(S^n) = S^n = t_n(S^n)$. Supposons que $t'_m(S^n) = t_m(S^n)$. Alors

$$t_{m-1}\big(S^n\big) = t_{m-1}\big(t_m\big(S^n\big)\big) = t_{m-1}\big(t'_m\big(S^n\big)\big).$$

Or grâce au corollaire 1, on montre facilement que $t_{m-1}(t'_m(S^n)) = t'_{m-1}(S^n)$, ce qui achève la récurrence.

Pour terminer, on calcule les quotients. Il est évident que

$$t_m\bigl(S^n\bigr)\big/t_{m-1}\bigl(S^n\bigr)=\Biggl(\sum_{\underline{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)}S(\underline{\lambda})\Biggr)\Bigg/t_{m-1}\Biggl(\sum_{\underline{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)}S(\underline{\lambda})\Biggr).$$

Ici, les partitions sont exactement de longueur m. Il suffit donc de montrer que si $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ sont deux partitions p-adiques distinctes de n, de longueur commune m, alors

$$\bigl(S(\underline{\lambda})+S(\underline{\mu})\bigr)\big/t_{m-1}\bigl(S(\underline{\lambda})+S(\underline{\mu})\bigr)=\bigl(S(\underline{\lambda})/t_{m-1}S(\underline{\lambda})\bigr)\oplus\bigl(S(\underline{\mu})/t_{m-1}S(\underline{\mu})\bigr).$$

Cela provient du fait que $S(\underline{\lambda})\cap S(\underline{\mu})$ est contenu dans $t_{m-1}(S(\underline{\lambda})+S(\underline{\mu}))$, d'après le lemme 5, car $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ ne sont pas comparables entre eux. $\square$

2. Foncteurs booléens

Soit B un foncteur de $\mathcal{F}$ muni d'un produit associatif et commutatif

$$\mu : B\times B\to B.$$

Le produit μ définit pour tout entier $k\geqslant 1$ un morphisme, également noté μ, de B^k dans B. On note $\Delta^k : B\to B^k$ la diagonale de B dans B^k.

Définition 3. Le foncteur B est dit *p-booléen* (ou simplement *booléen*) si la composition $B\xrightarrow{\Delta^p}B^p\xrightarrow{\mu}B$ est l'identité de B. Autrement dit, $x^p=x$ pour tout $x\in B(V)$.

Voici quelques exemples importants de foncteurs booléens.

Exemple 2. L'injectif standard $I_{\mathbb{F}_p}(V)=\mathbb{F}_p^{V^*}$ est un foncteur booléen pour le produit

$$\mu(V):\bigl(\Phi,\Phi':V^*\to\mathbb{F}_2\bigr)\mapsto\bigl(\Psi:f\in V^*\mapsto\Phi(f)\Phi'(f)\bigr).$$

Exemple 3. Soit B un foncteur booléen de produit μ. Alors $\Gamma^n\circ B$ est encore un foncteur booléen, pour le produit défini par

$$(x_1\otimes\cdots\otimes x_n,\ y_1\otimes\cdots\otimes y_n)\mapsto\mu(x_1,y_1)\otimes\cdots\otimes\mu(x_n,y_n).$$

Par itération, $\Gamma^{n_1}\circ\cdots\circ\Gamma^{n_k}\circ B$ est un foncteur booléen.

Exemple 4. Le foncteur S^{p^∞} est un foncteur en algèbres commutatives pour le produit induit par celui de l'algèbre symétrique. Pour ce produit, la relation $x^p=x$ est vérifiée. Mais ce produit n'est pas associatif. Ce n'est donc pas un foncteur booléen. En revanche, si $p=2$, il vérifie la relation $(xy)(zt)=(xz)(yt)$ définissant les algèbres à niveau. On dira que c'est un *foncteur à niveau booléen*. Si $p>2$, on peut considérer S^{p^∞} comme un foncteur en algèbres p-aires (dont le produit est une opération p-aire, déduit du produit p-aire de l'algèbre symétrique). Ce produit n'est pas forcément égal à l'itération du produit binaire. Il vérifie $x^p = x$, ainsi qu'une relation à p^2 termes similaire à celle obtenue pour $p = 2$: on peut intervertir tout couple de termes apparaissant dans deux blocs distincts de p termes. On dira que S^{p^∞} est un *foncteur à niveau p-booléen*. On vérifiera aisément que les résultats de cet article, donnés pour des foncteurs booléens, sont encore valables pour les foncteurs à niveau p-booléens.

Dans la suite de cet article, on considérera le foncteur $S^n \circ B$. Il y aura donc en jeu deux produits :

– le produit interne à B, de $B^{\otimes 2}$ dans B,
– le produit de l'algèbre symétrique, de $B^{\otimes 2} = (S^1 \otimes S^1) \circ B$ dans $S^2 \circ B$.

Afin de bien distinguer ces deux produits, on introduit quelques notations.

Notation 1.

– Pour x et y dans $B(V)$, on notera $x * y$ le produit $\mu(x, y)$, par opposition au produit dans l'algèbre symétrique, noté $x \cdot y$ ou xy.
– L'écriture $x_1 \cdots x_n$ désignera toujours le produit *dans l'algèbre symétrique* des x_i. Pour désigner le produit dans B, on écrira $x_1 * \cdots * x_n$.
– Étant donnée une famille $x = (x_i)_{i \in J}$ d'éléments de $B(V)$, et I un sous-ensemble fini de J, on note x_I^* l'élément de $B(V)$ obtenu comme produit interne à B des éléments $(x_i)_{i \in I}$. Cette notation s'oppose à la notation x_I désignant l'élément de $S^{|I|}(B(V))$ obtenu comme produit dans l'algèbre symétrique des éléments $(x_i)_{i \in I}$.
– Étant donnée une famille $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_\ell\}$ de sous-ensembles de J, on note $x_{\mathcal{I}}$ l'élément $(x_{I_1}^*)^{|I_1|} \cdot \cdots \cdot (x_{I_\ell}^*)^{|I_\ell|}$.
– La puissance $k$ième par rapport à $*$ d'un élément x sera notée x^{*k}, par opposition à la puissance $k$ième dans l'algèbre symétrique, notée x^k.

Dans ce qui suit, B désigne un foncteur booléen.

3. Décomposition de $S^n \circ B$

On montre ici qu'après composition (à droite) par un foncteur booléen B, la filtration $(t_m(S^n))$ est scindée. Plus précisément :

Théorème 3. *Soit B un foncteur booléen et soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_\ell)$ une partition p-adique de n. L'inclusion $i(\underline{\lambda}) : S(\underline{\lambda}) \circ B \to S^n \circ B$ est une inclusion directe.*

Nous montrerons ce théorème à la fin de la présente section. Auparavant, nous introduisons quelques notations et lemmes.

Notation 2. Soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ une partition p-adique de n. On définit

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{\lambda}) : S^n \circ B &\to S(\underline{\lambda}) \circ B \\ x_1 \cdots x_n &\mapsto \sum_{\{I_1, \dots, I_m\}} \big(x^*_{I_1}\big)^{\lambda_1} \cdots \big(x^*_{I_\ell}\big)^{\lambda_\ell}, \end{aligned} \tag{4}$$

où la somme est prise sur les partitions $\{I_1, \dots, I_\ell\}$ de $\{1, \dots, n\}$ telles que $|I_i| = \lambda_i$. On notera $x_{\{I_1, \dots, I_\ell\}}$ le monôme de la somme ci-dessus correspondant à la partition $\{I_1, \dots, I_\ell\}$.

Dans les exemples 5 et 6, on suppose que $p = 2$.

Exemple 5. $\Phi(2,1)(x_1x_2x_3) = (x_1 * x_2)^2 x_3 + (x_1 * x_3)^2 x_2 + (x_2 * x_3)^2 x_1$.

Le morphisme $\Phi(\underline{\lambda})$ n'est en général pas un scindement de l'inclusion $i(\underline{\lambda})$, ainsi que le montre l'exemple 6.

Exemple 6. $\Phi(2,1,1) \circ i(2,1,1)(x_1^2 x_2 x_3) = x_1^2 x_2 x_3 + (x_2 * x_3)^2 x_1^2$.

Dans cet exemple, il apparaît un terme perturbateur $(x_2 * x_3)^2 x_1^2$. Ce terme est un élément de $S(2,2) \circ B$. Dans ce cas, on peut corriger l'expression obtenue en rajoutant l'image de $x_1^2 x_2 x_3$ par le morphisme $\Phi(2,2)$. Ainsi, $\Phi(2,1,1) + \Phi(2,2)$ est un scindement de $i(2,1,1)$.

Dans le cas général, on ne parvient pas à construire *explicitement* le scindement recherché sous la forme d'une somme de ces applications Φ. Une telle construction est cependant possible dans certains cas particuliers, par exemple pour la partition $(p, 1, \dots, 1)$. Cet exemple joue un rôle important dans la démonstration du théorème 3.

Proposition 6. *Soit $(p, 1, \dots, 1)$ la partition p-adique de n constituée d'une part de taille p et de $n - p$ parts de taille 1. Le foncteur $S(p, 1, \dots, 1) \circ B$ est un facteur direct de $S^n \circ B$.*

Démonstration. Soit $y^p x_1 \cdots x_{n-p}$ un élément générateur de $S(p, 1, \dots, 1) \circ B(V)$. Soit $((p)^k (1)^{n-p^k})$ la partition p-adique de n composée de $k - 1$ parts de taille p et de $n - p^k$ parts de taille 1. On désigne par k_0 le plus grand entier tel que $p \cdot k_0 \leqslant n - p$. Un calcul direct montre que la somme alternée

$$\sum_{k=1}^{k_0+1} (-1)^{k-1} \Phi\big((p)^k (1)^{n-p^k}\big)$$

est un scindement de l'inclusion de $S(p, 1, \dots, 1) \circ B$ dans $S^n \circ B$. $\square$

Corollaire 2. *Le foncteur $S^n_p \circ B$ est un facteur direct de $S^n \circ B$.*

Démonstration. Après composition à droite par B, la suite exacte courte

$$0 \to S(p, 1, \dots, 1) \to S^n \to S^n_p \to 0$$

se scinde d'après la proposition 6, ce qui entraîne le corollaire. □

Soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ et $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ deux partitions p-adiques de n. Soit $x_1^{\mu_1} \cdots x_m^{\mu_m}$ un élément générateur de $S(\underline{\mu})$. On note $(J_1, \dots, J_m)$ la partition de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ définie par

$$J_j = \{i \mid \mu_1 + \cdots + \mu_{j-1} + 1 \leqslant i \leqslant \mu_1 + \cdots + \mu_j\}.$$

On définit $y_1, \dots, y_n$ par $y_i = x_j$ si $i \in J_j$. En particulier, $y_{J_j} = x_j^{\mu_j}$, et $y_1 \cdots y_n = x_1^{\mu_1} \cdots x_m^{\mu_m}$.

Lemme 2. *Avec les notations ci-dessus, l'image de $x_1^{\mu_1} \cdots x_m^{\mu_m}$ par $\Phi(\underline{\lambda})$ est*

$$\Phi(\underline{\lambda})\big(x_1^{\mu_1} \cdots x_m^{\mu_m}\big) = \sum_{\{I_1, \dots, I_\ell\}} \prod_{i=1}^{\ell} \big(y_{I_i}^*\big)^{\lambda_i},$$

où la somme est prise sur les partitions $\{I_1, \dots, I_\ell\}$ de $\{1, \dots, n\}$ telles que

- *pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $|I_i| = \lambda_i$;*
- *pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$ et tout $j \in \{1, \dots, m\}$, soit $I_i \subset J_j$, soit $J_j \subset I_i$.*

Avant de démontrer ce lemme, voyons-en quelques conséquences.

Corollaire 3. *L'image de $x_1^{\mu_1} \cdots x_m^{\mu_m}$ par $\Phi(\underline{\lambda})$ est donnée par*

$$\Phi(\underline{\lambda})\big(x_1^{\mu_1} \cdots x_m^{\mu_m}\big) = \sum_{\{I_1, \dots, I_\ell\}} \left(\prod_{j \mid \exists i,\, I_i \subset J_j} x_j^{\mu_j} \cdot \prod_{i \mid \exists j,\, J_j \subsetneq I_i} \big(y_{I_i}^*\big)^{\lambda_i} \right)$$

la somme étant prise sur les mêmes partitions que dans le lemme 2.

Démonstration. D'après le lemme 2,

$$\Phi(\underline{\lambda})\big(x_1^{\mu_1} \cdots x_m^{\mu_m}\big) = \sum_{\{I_1, \dots, I_\ell\}} \left(\prod_{i \mid \exists j,\, I_i \subset J_j} \big(y_{I_i}^*\big)^{\lambda_i} \cdot \prod_{i \mid \exists j,\, J_j \subsetneq I_i} \big(y_{I_i}^*\big)^{\lambda_i} \right),$$

où la somme est prise sur les partitions décrites dans le lemme 2. Mais si $I_i \subset J_j$, alors

$$y_{I_i}^* = x_j^{*|I_i|} = x_j^{*\lambda_i}.$$

Comme $x^{*p} = x$ et λ_i est une puissance de p, il en résulte que $y^*_{I_i} = x_j$. Par conséquent, le premier produit s'écrit

$$\prod_{i\,|\,\exists j,\, I_i\subset J_j} \left(y^*_{I_i}\right)^{\lambda_i} = \prod_{i\,|\,\exists j,\, I_i\subset J_j} x_j^{\lambda_i} = \prod_{j\,|\,\exists i,\, I_i\subset J_j} x_j^{\mu_j}. \qquad \square$$

Corollaire 4. *Soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ une partition p-adique de n. Alors*

$$\Phi(\underline{\lambda})\left(x_1^{\lambda_1}\cdots x_k^{\lambda_k}\right) = x_1^{\lambda_1}\cdots x_k^{\lambda_k} \mod \sum_{\underline{\mu}\in\underline{\lambda}_>} S(\underline{\mu})\circ B.$$

Démonstration. On utilise le corollaire 3 dans le cas où $\underline{\lambda} = \underline{\mu}$. Dans ce cas, la partition $\{J_1, \dots, J_m\}$ fait partie des indices de sommation, et le terme correspondant de la somme est $x_1^{\lambda_1}\cdots x_\ell^{\lambda_\ell}$. Soit $\{I_1, \dots, I_\ell\}$ un autre indice de la somme. L'égalité du corollaire 3 montre que le terme correspondant dans la somme est dans $\sum_{\underline{\mu}\in\underline{\lambda}_>} S(\underline{\mu})\circ B$. En effet, soit $\underline{\kappa}$ la partition contenant :

- les parts λ_j pour tout j tel qu'il existe i tel que $I_i \subset J_j$,
- les parts λ_i pour tout i tel qu'il existe j tel que $J_j \subsetneq I_i$. Dans ce cas,

$$\lambda_i = \sum_{j\,|\,J_j\subset I_i} \lambda_j. \tag{5}$$

On est dans la deuxième situation pour au moins un indice i. La somme (5) contient pour tout tel indice i au moins deux termes. Par conséquent, la partition $\underline{\kappa}$ est raffinée *strictement* par $\underline{\lambda}$. On termine en remarquant que le monôme $y_{\{I_1,\dots,I_\ell\}}$ (notation 2) est contenu dans $S(\underline{\kappa})\circ B$. $\square$

Corollaire 5. *Soit $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ deux partitions p-adiques de n. Alors*

$$\Phi(\underline{\lambda})\left(S(\underline{\mu})\circ B\right) \subset S(\underline{\mu})\circ B \cap S(\underline{\lambda})\circ B = S\left(\min(\underline{\lambda},\underline{\mu})\right)\circ B.$$

Démonstration. Soit $y_1\cdots y_n = x_1^{\mu_1}\cdots x_m^{\mu_m}$ un élément de $S(\underline{\mu})\circ B(V)$ comme dans le lemme 2. Son image par $\Phi(\underline{\lambda})$ est contenue dans $S(\min(\underline{\lambda},\underline{\mu}))\circ B(V)$. En effet, pour les mêmes raisons que pour le corollaire 4, pour toute partition $\{I_1, \dots, I_\ell\}$ de $\{1, \dots, n\}$ telle que dans le lemme 2, le monôme $y_{\{I_1,\dots,I_\ell\}}$ est contenu dans $S(\underline{\kappa})$ pour une certaine partition p-adique de n vérifiant à la fois $\underline{\kappa} \leqslant \underline{\lambda}$ et $\underline{\kappa} \leqslant \underline{\mu}$, ce qui montre l'inclusion. $\square$

Démonstration du lemme 2. Soit $\mathrm{Part}(\underline{\lambda})$ l'ensemble des partitions $(I) = \{I_1, \dots, I_\ell\}$ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ telles que $|I_i| = \lambda_i$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit (à droite) sur $\mathrm{Part}(\underline{\lambda})$. En effet, soit σ une permutation dans $\mathfrak{S}_n$. Pour un sous-ensemble $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ de $\{1, \dots, n\}$, on définit l'ensemble I^σ par

$$I^\sigma = \left\{\sigma^{-1}(i_1), \dots, \sigma^{-1}(i_k)\right\}.$$

Étant donnée une partition $(I) = \{I_1, \dots, I_\ell\}$ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, on définit la partition (I^σ) par

$$(I^\sigma) = \{I_1^\sigma, \dots, I_\ell^\sigma\}.$$

L'action du groupe symétrique sur les partitions de $\{1, \dots, n\}$ est alors donnée par

$$(I) \cdot \sigma = (I^\sigma).$$

Soit $(I) = \{I_1, \dots, I_\ell\}$ un élément de $\mathrm{Part}(\underline{\lambda})$, et $z_1, \dots, z_n$ des éléments de $B(V)$. Alors, si $\mathrm{Stab}(I)$ désigne le stabilisateur de (I) sous l'action de $\mathfrak{S}_n$, $\Phi(\underline{\lambda})(z_1 \cdots z_n)$ est donné par

$$\Phi(\underline{\lambda})(z_1 \cdots z_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \mathrm{Stab}(I)} z_{(I^\sigma)}. \tag{6}$$

Ici $z_{(I^\sigma)}$ désigne le monôme $(z^*_{I_1^\sigma})^{\lambda_1} \cdots (z^*_{I_\ell^\sigma})^{\lambda_\ell}$, conformément à la notation 1.

Avec les notations du lemme, supposons qu'il existe i et j (qu'on se fixe une fois pour toutes) tels que $I_i \cup J_j \subsetneq I_i, J_j$. On doit montrer que

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \mathrm{Stab}(I) \\ \exists s,t,\, I_s^\sigma \cap J_t \subsetneq I_s^\sigma, J_t}} y_{(I^\sigma)} = 0. \tag{7}$$

On suppose que tous les y_s sont discernables deux à deux (même si en tant qu'éléments de $B(V)$, ils sont égaux), sauf les éléments $\{y_s \mid s \in J_j\}$. Sous cette convention, le nombre de termes égaux à $y_{(I)}$ dans la somme définissant $\Phi(\underline{\lambda})(y_1 \cdots y_n)$ (tous obtenus par permutation des y_s, pour $s \in J_j$) est égal à

$$\mathfrak{S}_{J_j} / (\mathfrak{S}_{J_j} \cap \mathrm{Stab}(I)). \tag{8}$$

C'est aussi le nombre de ces termes dans la somme (7), car puisque $I_i \cap J_j \subsetneq I_i, J_j$ on a aussi, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{J_j}$, $I_i^\sigma \cap J_j \subsetneq I_i^\sigma, J_j$. Or, on définit une inclusion

$$\mathfrak{S}_{J_j} \cap \mathrm{Stab}(I) \xrightarrow{f} \mathfrak{S}_{J_j \cap I_i} \times \mathfrak{S}_{J_j - I_i}$$

par les restrictions

$$f(\sigma) = (\sigma|_{J_j \cap I_i}, \sigma|_{J_j - I_i}). \tag{9}$$

L'application (9) est clairement un morphisme de groupes. C'est une injection, car si $f(\sigma) = (\mathrm{id}, \mathrm{id})$, alors pour tout $s \in J_j$, $\sigma(s) = s$, et puisque $\sigma \in \mathfrak{S}_{J_j}$, cela implique que $\sigma = \mathrm{id}$.

On obtient donc une chaîne d'inclusions de groupes

$$\mathfrak{S}_{J_j} \cap \mathrm{Stab}(I) \subset \mathfrak{S}_{J_j \cap I_i} \times \mathfrak{S}_{J_j - I_i} \subset \mathfrak{S}_{J_j}.$$

On en déduit une relation sur les indices

$$\begin{aligned}&\big[\mathfrak{S}_{J_j} \mid \mathfrak{S}_{J_j} \cap \mathrm{Stab}(I)\big]\\ &\quad = \big[\mathfrak{S}_{J_j \cap I_i} \times \mathfrak{S}_{J_j - I_i} \mid \mathfrak{S}_{J_j} \cap \mathrm{Stab}(I)\big] \cdot [\mathfrak{S}_{J_j} \mid \mathfrak{S}_{J_j \cap I_i} \times \mathfrak{S}_{J_j - I_i}]. \qquad (10)\end{aligned}$$

Soit a le cardinal de $J_j \cap I_i$. On a $a \neq \lambda_j$ et $a \neq 0$. Ainsi, $[\mathfrak{S}_{J_j} \mid \mathfrak{S}_{J_j \cap I_i} \times \mathfrak{S}_{J_j - I_i}]$, égal au coefficient binômial $\binom{\lambda_j}{a}$ est divisible par p. On en déduit que l'indice $[\mathfrak{S}_{J_j} \mid \mathfrak{S}(J_j) \cap \mathrm{Stab}(I)]$, égal d'après (8) au nombre d'occurrences du terme $y_{(I)}$ dans la somme (7) est divisible par p. La somme de ces termes (avec la convention d'indiscernabilité, puis sans) est donc nulle.

En raisonnant ainsi pour tous les termes susceptibles d'apparaître dans la somme (7), on montre que cette somme est nulle. □

On montre maintenant dans le cas général que chacun des termes de la décomposition de $t_k(S^n) \circ B / t_{k-1}(S^n) \circ B$ donnée dans le théorème 2 est un facteur direct de $S^n \circ B$.

Proposition 7. *Soit $\underline{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_s)$ une suite d'entiers positifs ou nuls tels que $\nu_0 p^0 + \cdots + \nu_s p^s = n$. Alors il existe une inclusion directe de $S_p(\underline{\nu}) \circ B$ dans $S^n \circ B$.*

Démonstration. Pour tout entier n, on note $\pi(n)$ la projection naturelle $S^n \circ B \to S_p^n \circ B$ et $\iota(n)$ l'inclusion $S_p^n \circ B \to S^n \circ B$ obtenue par le corollaire 2. En particulier, $\iota(n)$ est une inclusion directe dont $\pi(n)$ est une projection réciproque.

On définit dans la figure 1 une inclusion $\iota(\underline{\nu}) : S_p(\underline{\nu}) \circ B \to S^n \circ B$ et une projection réciproque

$$\pi(\underline{\nu}) : S^n \circ B \to S(\underline{\lambda}) \circ B \Big/ \sum_{\underline{\mu} \in \underline{\lambda}_>} S(\underline{\mu}) \circ B \simeq S_p(\underline{\nu}),$$

$$\begin{tikzcd}
S_p^{\nu_0}\circ B\otimes\cdots\otimes S_p^{\nu_s}\circ B \arrow[rr, "\simeq", "\alpha"'] \arrow[d, "\iota(\nu_0)\otimes\cdots\otimes\iota(\nu_s)"] \arrow[ddd, bend right, "\iota(\underline{\nu})"'] & & S(\underline{\lambda}(\underline{\nu}))\circ B\big/\sum_{\underline{\mu}\in\underline{\lambda}(\underline{\nu})_>} S(\underline{\mu})\circ B \\
S^{\nu_0}\circ B\otimes\cdots\otimes S^{\nu_s}\circ B \arrow[d, "\phi^0\otimes\cdots\otimes\phi^s"] & & \\
S^{\nu_0 p^0}\circ B\otimes\cdots\otimes S^{\nu_s p^s}\circ B \arrow[d, "\text{proj.}"] & & S(\underline{\lambda}(\underline{\nu}))\circ B \arrow[uu, "\text{proj.}"] \\
S^{\nu_0 p^0+\cdots+\nu_s p^s}\circ B \arrow[rr, equal] & & S^n\circ B \arrow[u, "\Phi(\underline{\lambda}(\underline{\nu}))"] \arrow[uuu, bend right, "\pi(\underline{\nu})"']
\end{tikzcd}$$

Fig. 1. Inclusion directe de $S_p(\underline{\nu}) \circ B$ dans $S^n \circ B$.

telles que $\pi(\underline{\nu})\circ\iota(\underline{\nu})$ est l'identité de $S_p(\underline{\nu})$. Dans la figure 1, α est l'isomorphisme défini en (2), et ϕ est le morphisme de Frobenius $S^k \circ B \to S^{pk} \circ B$.

Il suffit de vérifier que la composée $\alpha^{-1} \circ \pi(\underline{\nu}) \circ \iota(\underline{\nu})$ est égale à l'identité. Pour i tel que $0 \leqslant i \leqslant s$, soit X_i un élément de $S_p^{\nu_i} \circ B$. Alors

$$\iota(\underline{\nu})(X_1 \otimes \cdots \otimes X_s) = \iota(\nu_0)(X_0)^{p^0} \cdots \iota(\nu_s)(X_s)^{p^s}.$$

Par conséquent, d'après le corollaire 4,

$$\pi(\underline{\nu}) \circ \iota(\underline{\nu})(X_1 \otimes \cdots \otimes X_s) = \iota(\nu_0)(X_0)^{p^0} \cdots \iota(\nu_s)(X_s)^{p^s} \quad \mathrm{mod} \sum_{\underline{\mu}\in\underline{\lambda}_>} S(\underline{\mu}) \circ B,$$

puis, d'après la définition de α,

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} \circ \pi(\underline{\nu}) \circ \iota(\underline{\nu})(X_1 \otimes \cdots \otimes X_s) &= \pi(\nu_0)\big(\iota(\nu_0)(X_0)\big) \otimes \cdots \otimes \pi(\nu_s)\big(\iota(\nu_s)(X_s)\big)\\ &= X_1 \otimes \cdots \otimes X_s.\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que pour tout m, $\iota(m)$ est par définition un scindement de la projection $\pi(m)$. □

Il faut maintenant prouver que toutes les inclusions directes définies ainsi sont compatibles entre elles, dans le sens où

– elles définissent des inclusions directes

$$\bigoplus_{\underline{\nu}\in E} S_p(\underline{\nu}) \circ B \to S^n \circ B,$$

pour tout ensemble E de suites $\underline{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_s)$ telles que $\sum \nu_i p^i = n$;

– elles induisent des inclusions directes

$$\sum_{\underline{\nu}\in E} S\big(\underline{\lambda}(\underline{\nu})\big) \circ B \to S^n \circ B.$$

Proposition 8. *Soit m un entier, et E un ensemble de suites $\underline{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_s)$ telles que $\sum \nu_i p^i = n$ et $\sum \nu_i = m$. Alors le sous-foncteur $\bigoplus_{\underline{\nu}\in E} S_p(\underline{\nu})$ de $t_m(S^n)/t_{m-1}(S^n)$ est un facteur direct de S^n. Plus précisément :*

$$\sum_{\underline{\nu}\in E} \iota(\underline{\nu}) : \bigoplus_{\underline{\nu}\in E} S_p(\underline{\nu}) \circ B \to S^n \circ B$$

est une inclusion directe.

Démonstration. On montre que le morphisme

$$\bigoplus_{\underline{\nu}\in E}\pi(\underline{\nu}): S^n\circ B\to\bigoplus_{\underline{\nu}\in E}S_p(\underline{\nu})\circ B$$

est un scindement de $\sum_{\underline{\nu}\in E}\iota(\underline{\nu})$. Il suffit de montrer que pour $\underline{\nu}$ et $\underline{\nu}'$ dans E tels que $\underline{\nu}\neq\underline{\nu}'$,

$$\pi\big(\underline{\nu}'\big)\circ\iota(\underline{\nu})=0.$$

Avec les notations de la démonstration de 7,

$$\pi\big(\underline{\nu}'\big)\circ\iota(\underline{\nu})(X_0\otimes\cdots\otimes X_s)=\pi\big(\underline{\nu}'\big)\big(\iota(\nu_1)(X_0)^{\nu_0p^0}\cdots\iota(\nu_s)(X_0)^{\nu_sp^s}\big).$$

Par définition de $\pi(\underline{\nu}')$ (figure 1), il suffit de vérifier que l'image de l'élément $\iota(\nu_1)(X_0)^{\nu_0p^0}\cdots\iota(\nu_s)(X_0)^{\nu_sp^s}$ par $\Phi(\underline{\lambda}(\underline{\nu}'))$ est dans $\sum_{\underline{\mu}\in\underline{\lambda}(\underline{\nu}')_>}S(\underline{\mu})\circ B$, ce qui provient du corollaire 5 et du fait que $\min(\underline{\lambda}(\underline{\nu}),\underline{\lambda}(\underline{\nu}'))<\underline{\lambda}(\underline{\nu}')$, puisque $\underline{\lambda}(\underline{\nu})\neq\underline{\lambda}(\underline{\nu}')$ et que le nombre de parts de ces deux partitions est le même. □

On en déduit immédiatement :

Corollaire 6. *Pour tout m, le foncteur $[t_m(S^n)/t_{m-1}(S^n)]\circ B$ est un facteur direct de $S^n\circ B$.*

Notation 3. Soit E un ensemble de partitions p-adiques de n. On note ι_E l'inclusion

$$\iota_E=\sum_{\underline{\lambda}\in E}\iota\big(\underline{\nu}(\underline{\lambda})\big):\bigoplus_{\underline{\lambda}\in E}S_p\big(\underline{\nu}(\underline{\lambda})\big)\circ B\to S^n\circ B,$$

et π_E la projection

$$\pi_E=\bigoplus_{\underline{\nu}\in E}\pi(\underline{\nu}): S^n\circ B\to\bigoplus_{\underline{\nu}\in E}S_p(\underline{\nu})\circ B.$$

D'après la proposition 8, π_E est un scindement de ι_E. On note également i_E l'inclusion évidente de $\sum_{\underline{\lambda}\in E}S(\underline{\lambda})$ dans S^n.

Lemme 3. *Soit E un ensemble de partitions p-adiques de n. Alors $\pi_E\circ i_E$ est égal à la projection naturelle*

$$\sum_{\underline{\lambda}\in E}S(\underline{\lambda})\circ B\xrightarrow{\mathrm{pr}}\bigoplus_{\underline{\lambda}\in E}S_p\big(\underline{\nu}(\underline{\lambda})\big)\circ B.$$

La démonstration de ce lemme ne présente pas de difficulté.

Proposition 9. *Soit m un entier, et E un ensemble de partitions p-adiques de n ayant toutes m parts. Alors $\sum_{\underline{\lambda}\in E} S(\underline{\lambda}) \circ B$ est un facteur direct de $S^n \circ B$. Autrement dit, il existe une projection p_E dont i_E est un scindement.*

Démonstration. On opère par récurrence sur m, en initialisant pour $m < 0$. Dans ce cas, E est vide, et le résultat est trivial.

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour $m' < m$, et soit E un ensemble de partitions p-adiques de n toutes de longueur m. On a une suite exacte courte

$$t_{m-1}\Bigl(\sum_{\underline{\lambda}\in E} S(\underline{\lambda})\Bigr) \circ B \xrightarrow{i} \sum_{\underline{\lambda}\in E} S(\underline{\lambda}) \circ B \xrightarrow{\mathrm{pr}} \bigoplus_{\underline{\lambda}\in E} S_p\bigl(\underline{\nu}(\underline{\lambda})\bigr) \circ B.$$

On construit alors la projection p_E en considérant le diagramme de la figure 2. Dans cette figure, $i_{E'}$ et $p_{E'}$ sont obtenus par l'hypothèse de récurrence au rang $m-p+1$, en remarquant que, d'après la proposition 2 et le théorème 2, le foncteur $t_{m-1}(\sum_{\underline{\lambda}\in E} S(\underline{\lambda}))$ s'écrit comme une certaine somme

$$t_{m-1}\Bigl(\sum_{\underline{\lambda}\in E} S(\underline{\lambda})\Bigr) = \sum_{\underline{\mu}\in E'} S(\underline{\mu}),$$

où E' est un certain ensemble de partitions p-adiques de n, toutes de longueur $m-p+1$. De plus, q est une projection scindée par i. Plus précisément,

$$q = p_{E'} \circ i_E. \tag{11}$$

Puisque $i_E \circ i = i_{E'}$, on a bien $q \circ i = \mathrm{id}$. Ainsi, la suite exacte définie par la ligne inférieure est scindée, ce qui permet de construire un scindement j de la projection pr. On définit alors p_E par :

$$p_E = i \circ p_{E'} + j \circ \pi_E.$$

$$\begin{tikzcd}
& S^n \circ B \arrow[dl, bend right, "p_{E'}"'] \arrow[d, dotted, bend right, "p_E"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_E"] & \\
t_{m-1}\bigl(\sum_{\underline{\lambda}\in E} S(\underline{\lambda})\bigr) \circ B \arrow[ur, "i_{E'}"'] \arrow[r, "i"] & \sum_{\underline{\lambda}\in E} S(\underline{\lambda}) \circ B \arrow[u, bend right, "i_E"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[l, dotted, bend left, "q"] & \bigoplus_{\underline{\lambda}\in E} S_p\bigl(\underline{\nu}(\underline{\lambda})\bigr) \circ B \arrow[ul, bend right, "\iota_E"'] \arrow[l, dotted, bend left, "j"]
\end{tikzcd}$$

Fig. 2. Construction de la projection p_E.

Par (11) et par le lemme 3, on obtient

$$p_E \circ i_E = i \circ q + j \circ \mathrm{pr} = \mathrm{id}. \qquad \square$$

Le théorème 3 découle immédiatement de ce qui précède, ainsi que la décomposition suivante :

Corollaire 7. *Soit B un foncteur booléen. Alors* :

$$S^n \circ B = \bigoplus_{k \geqslant 0} t_k\big(S^n\big) \circ B \big/ t_{k-1}\big(S^n\big) \circ B = \bigoplus_{\substack{\underline{\nu}=(\nu_0,\dots,\nu_s) \\ \nu_0 p^0 + \dots + \nu_s p^s = n}} S_p(\underline{\nu}) \circ B.$$

Pour terminer cette section, on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'expression $S^n \circ B$. Autrement dit, on s'intéresse à $S^{p^\infty} \circ B$.

D'après le théorème 3 appliqué à la partition $(p, \dots, p)$ de p^{n+1}, le morphisme de Frobenius induit des inclusions directes $S^{p^n} \circ B \to S^{p^{n+1}} \circ B$. Le foncteur $S^{p^\infty} \circ B$ étant la limite directe du système constitué de ces inclusions, on en déduit que

$$S^{p^\infty} \circ B = S^1 \circ B \oplus \bigoplus_{n \geqslant 1} \big(S^{p^n} / S^{p^{n-1}}\big) \circ B,$$

et on obtient par conséquent la décomposition suivante.

Corollaire 8. *Soit B un foncteur booléen. Alors* :

$$S^{p^\infty} \circ B = \bigoplus_{n \geqslant 0} \bigoplus_{\substack{\underline{\nu}=(\nu_0,\dots,\nu_s) \\ \nu_0 p^0 + \dots + \nu_s p^s = p^n \\ \nu_0 > 0}} S_p(\underline{\nu}) \circ B.$$

4. Scindement de $I_{\mathbb{F}_p} \circ B$

Ce qu'on note ici $I_{\mathbb{F}_p} \circ B$ est par abus de notation le foncteur limite directe du système

$$t_0(I_{\mathbb{F}_p}) \circ B \to t_1(I_{\mathbb{F}_p}) \circ B \to t_2(I_{\mathbb{F}_p}) \circ B \to \cdots.$$

On prendra garde qu'en général, si B prend des valeurs de dimension infinie,

$$I_{\mathbb{F}_p} \circ B(V) \neq \mathbb{F}_2^{B(V)^*},$$

car la condition pour avoir cette égalité est $B(V)^{**} \cong B(V)$. C'est vrai si B est à valeur dans $\mathcal{E}^f$, par exemple si $B = I_{\mathbb{F}_p}$.

On rappelle que $t_n(I_{\mathbb{F}_p})(V)$ est isomorphe à

$$\bigl\{\phi : V^* \to \mathbb{F}_p \mid \exists\, x_1, \dots, x_n \in V \text{ tels que } \forall f \in V^*,\ \phi(f) = f(x_1) \cdots f(x_n)\bigr\},$$

c'est-à-dire $t_n(I_{\mathbb{F}_p}) = S^0 \oplus \cdots \oplus S^n / x^p = x$. Les quotients de cette filtration sont

$$t_n(I_{\mathbb{F}_p}) / t_{n-1}(I_{\mathbb{F}_p}) = S_p^n.$$

Théorème 4. *Pour tout foncteur booléen B, $t_{n-1}(I_{\mathbb{F}_p}) \circ B \to t_n(I_{\mathbb{F}_p}) \circ B$ est une inclusion directe.*

Corollaire 9. *Soit B un foncteur booléen. Alors* :

$$I_{\mathbb{F}_p} \circ B = \bigoplus_{n \geqslant 0} S_p^n \circ B.$$

Remarque 1. Pour $B = I_{\mathbb{F}_p}$, $p = 2$, on obtient le scindement de $I_{\mathbb{F}_p} \circ I_{\mathbb{F}_p}$ de B. Richter [15, théorème 7.1].

Démonstration du théorème 4. Soit E_α^n l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n\}$ en $n - (p-1)a$ sous-ensembles $\{I_1, \dots, I_{n-(p-1)a}\}$ tels que

$$|I_1| = \cdots = |I_\alpha| = p \quad \text{et} \quad |I_{\alpha+1}| = \cdots = |I_{n-(p-1)\alpha}| = 1.$$

Pour $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_{n-(p-1)\alpha}\}$ un élément de E_α^n, on note $x_{\mathcal{I}}$ l'élément de $S^{n-(p-1)\alpha} \circ B$ défini par

$$x_{\mathcal{I}} = x_{I_1}^* \cdots x_{I_{n-(p-1)\alpha}}^*.$$

On note de la même manière son image dans $t_k(S^n) \circ B$, $k \geqslant n - (p-1)\alpha$. On définit

$$\overline{\Psi} : \bigl(S^0 \oplus \cdots \oplus S^n\bigr) \circ B \to \bigl(S^0 \oplus \cdots \oplus S^{n-1}\bigr) \circ B \to t_{n-1}(I_{\mathbb{F}_p}) \circ B$$

par

$$\overline{\Psi}(x_1 \cdots x_k) = x_1 \cdots x_k \tag{12}$$

si $k < n$, et

$$\overline{\Psi}(x_1 \cdots x_n) = \sum_{\alpha \geqslant 1} (-1)^{\alpha-1} \sum_{\mathcal{I} \in E_\alpha} x_{\mathcal{I}}. \tag{13}$$

Pour $\mathcal{I} \in E_\alpha$, soit I_0 l'union des I_j, pour $\alpha + 1 \leqslant j \leqslant n - (p-1)\alpha$. Comme pour ces indices, le cardinal de I_j est 1, on a

$$x_{I_{\alpha+1}}^* \cdots x_{I_{n-(p-1)\alpha}}^* = x_{I_0}.$$

Les termes de la somme (13) définissant $\overline{\Psi}$ sont donc de la forme $x^*_{I_1} \cdots x^*_{I_\alpha} x_{I_0}$. Dans cette expressions, les produits $*$ sont tous pris sur des ensembles à p éléments.

Résultat 1. $\overline{\Psi}(x_1 \cdots x_{n-p} x^p) = \overline{\Psi}(x_1 \cdots x_{n-p} x)$.

D'après (12), il suffit de vérifier que $\overline{\Psi}(x_1 \cdots x_{n-p} x^p) = x_1 \cdots x_{n-p} x$. Cela provient du résultat suivant, dans lequel on a posé $x_{n-p+1} = \cdots = x_n = x$.

Résultat 2. On a une égalité dans $t_{n-1}(I_{\mathbb{F}_p})$:

$$\sum_{\mathcal{I} \in E_\alpha^n} x_{\mathcal{I}} = \sum_{\mathcal{I} \in E_\alpha^{n-p}} x_{\mathcal{I}} \cdot x + \sum_{\mathcal{I} \in E_{\alpha-1}^{n-p}} x_{\mathcal{I}} \cdot x. \tag{14}$$

En effet, si le résultat 2 est vrai, alors

$$\sum_{\alpha \geqslant 1} (-1)^{\alpha-1} \sum_{\mathcal{I} \in E_a} = \sum_{\alpha \geqslant 1} (-1)^{\alpha-1} \left(\sum_{\mathcal{I} \in E_\alpha^{n-p}} x_{\mathcal{I}} \cdot x + \sum_{\mathcal{I} \in E_{\alpha-1}^{n-p}} x_{\mathcal{I}} \cdot x \right).$$

En simplifiant cette expression, on obtient, à l'aide de l'équation (13) :

$$\Psi\big(x_1 \cdots x_{n-p} x^p\big) = \sum_{\mathcal{I} \in E_0^{n-p}} x_{\mathcal{I}} \cdot x = x_1 \cdots x_{n-p} x,$$

d'où le résultat 1. L'application $\overline{\Psi}$ passe donc au quotient, et définit une application

$$\Psi : t_n(I_{\mathbb{F}_p}) \circ B \to t_{n-1}(I_{\mathbb{F}_p}) \circ B.$$

D'après l'équation (12), il est évident que cette application est scindée par l'inclusion de $t_{n-1}(I_{\mathbb{F}_p}) \circ B$ dans $t_n(I_{\mathbb{F}_p}) \circ B$, ce qui montre le théorème 4. $\square$

Démonstration du résultat 2. Soit $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_{n-(p-1)\alpha}\}$ dans E_α, et I_0 défini comme dans la démonstration du théorème 4. On note, pour $j \in \{0, \ldots, \alpha\}$,

$$\lambda_j = \big|I_j \cap \{n-p+1, \ldots, n\}\big|$$

et

$$J_j = I_j \cup \{1, \ldots, n-p+1\}.$$

Alors

$$x_{\mathcal{I}} = \big(x^{*\lambda_1} * x^*_{J_1}\big) \cdots \big(x^{*\lambda_a} * x^*_{J_a}\big) \cdot x^{\lambda_0} \cdot y_{J_0}. \tag{15}$$

Les différents facteurs égaux à x (c'est-à-dire les facteurs $x_{n-p+1}, \ldots, x_n$) sont interchangeables dans cette expression (15). Donc, toutes les expressions similaires obtenues à partir d'objets $\mathcal{I}'$ de E_α déduits de $\mathcal{I}$ par permutation de $n-p+1,\dots,n$ donnent la même expression (15). Il y a

$$\binom{p}{\lambda_0,\dots,\lambda_a} = \frac{p!}{\lambda_0!\cdots\lambda_a!}$$

tels objets $\mathcal{I}'$ donnant la même expression (15). Ce nombre est non nul modulo p si et seulement si tous les λ_i sont nuls, sauf un égal à p. Cela signifie que les termes x_i, $i > n-p$ restent groupés dans le sens où leurs indices se retrouvent dans le même ensemble I_{j_0}. Deux cas peuvent alors se produire :

– soit $j_0 = 0$, et dans ce cas, $x_{I_0} = x^p \cdot x_{J_0} = x \cdot x_{J_0}$. La deuxième égalité provient de la relation $x^p = x$ dans $t_{n-1}(I_{\mathbb{F}_p})$. On trouve la deuxième moitié de la somme (14) ;
– soit $j_0 \neq 0$. On peut supposer que $j_0 = \alpha$. Alors $x^*_{I_\alpha} = x^{*p} = x$. On trouve la première moitié de la somme. □

5. Applications au calcul d'extensions en caractéristique 2

Les décompositions trouvées dans les corollaires 7, 8 et 9 se révèlent particulièrement intéressantes en caractéristique 2. En effet, dans ce cas, les foncteurs S^i_p sont égaux aux puissances extérieures Λ^i. Or, par le complexe de Koszul, on parvient à relier les extensions faisant intervenir les puissances extérieures aux extensions faisant intervenir les puissances symétriques. On parvient ainsi à déterminer $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ B)$ en fonction de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, B)$, puis de calculer $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, I_{\mathbb{F}_p} \circ B)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^\infty} \circ B)$. Ces résultats permettent par exemple de déterminer $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ I_{\mathbb{F}_p})$, et par conséquent d'éviter le détour par $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, (S^2)^{\circ h} \circ I_{\mathbb{F}_p})$ (et donc par $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, (S^2)^{\circ h} \circ S^m))$ pour le calcul de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ S^m)$ exposé dans [17,19].

On expose également à la fin de cette section quelques résultats concernant $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \Lambda^n \circ I_{\mathbb{F}_p})$.

5.1. Préliminaires

On rappelle quelques outils efficaces pour calculer des groupes d'extensions dans la catégorie $\mathcal{F}$. Ces outils ont été exploités antérieurement pour le calcul des groupes $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n)$ [8,9], $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^n, S^m)$ [7], $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ S^m)$ [17–19], ou de divers autres groupes d'extensions dans la catégorie $\mathcal{F}$ [6,14].

La base de tous les calculs cités ci-dessus est l'existence, pour tout complexe $\mathcal{C}^\bullet$ d'objets de $\mathcal{F}$ (ou toute autre catégorie abélienne) et tout objet $T \in \mathcal{F}$ de deux suites spectrales $\mathbf{I}(T, \mathcal{C}^\bullet)$ et $\mathbf{II}(T, \mathcal{C}^\bullet)$ appelées première et seconde suites spectrales d'hypercohomologie, telles que

– les deux suites spectrales $\mathbf{I}(T, \mathcal{C}^\bullet)$ et $\mathbf{II}(T, \mathcal{C}^\bullet)$ ont même aboutissement ;
– en rang 1, $\mathbf{I}_1^{s,*} = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(T, \mathcal{C}^s)$;
– en rang 2, $\mathbf{II}_2^{*,t} = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(T, H^t(\mathcal{C}^\bullet))$;
– en rang r, les différentielles sont de bidegré $(r, 1-r)$.

Ces deux suites spectrales sont obtenues en filtrant horizontalement et verticalement le bicomplexe obtenu en appliquant $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(T,-)$ à une résolution injective de Cartan–Eilenberg du complexe $\mathcal{C}^\bullet$ [5, chapitre 17]. Par exemple, si le complexe $\mathcal{C}^\bullet$ est acyclique, la suite spectrale $\mathbf{I}(T,\mathcal{C}^\bullet)$ est d'aboutissement nul.

Le théorème suivant a joué un rôle primordial dans les calculs d'extensions :

Lemme 4 (Théorème d'annulation de Pirashvili, [12]). *Si* $F(0)=0$ *et* $G(0)=0$*, alors* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F\otimes G)=0$.

Il existe de nombreuses preuves de ce résultat. On pourra se référer à [8].

Remarque 2. Le théorème 4 reste vrai en remplaçant Id par un foncteur A *additif*. Franjou [6, proposition 1.4.2] l'a généralisé dans le cas de foncteurs non additifs. On obtient par exemple, pour $A=\Gamma^n$,

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\Gamma^n, F\otimes G\big)=\bigoplus_{m=0}^{n}\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\Gamma^m, F\big)\otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\Gamma^{n-m}, G\big).$$

Par exemple :

- si $F_1(0)=\cdots=F_{n+1}(0)=0$, alors $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^n, F_1\otimes\cdots\otimes F_{n+1})=0$;
- en particulier, si la longueur de la décomposition p-adique de m est strictement plus grande que n, alors $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^n, S^m)=0$;
- si $F(0)=0=G(0)$, alors $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, F\otimes G)=\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, F)\otimes\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G)$.

Les suites spectrales d'hypercohomologie et le lemme 4 permettent d'obtenir le lemme suivant, qui a été crucial pour le calcul de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n)$ [8] et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n\circ S^m)$ [17–19].

Lemme 5. *Si* $F(0)=0$*, alors* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \Lambda^n\circ F)=\mathrm{Ext}^{*-n+1}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n\circ F)$.

Démonstration. Il suffit de considérer les suites spectrales d'hypercohomologie du complexe de Koszul

$$\mathrm{Ko}^\bullet_n : \Lambda^n\to\Lambda^{n-1}\otimes S^1\to\cdots\to\Lambda^1\otimes S^{n-1}\to S^n \tag{16}$$

composé au préalable par F. Comme le complexe de Koszul est acyclique (et donc aussi le complexe $\mathrm{Ko}^\bullet_n\circ F$), la première suite spectrale a un aboutissement nul. D'après le théorème d'annulation de Pirashvili (chacun des foncteurs $\Lambda^i\circ F$ et $S^j\circ F$ sont sans terme constant, car $F(0)=0$), seules ses colonnes 0 et n sont non nulles, égales respectivement à $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \Lambda^n\circ F)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n\circ F)$. Puisque l'aboutissement est nul, la différentielle de rang n, de bidegré $(n, 1-n)$, est une bijection entre ces deux colonnes. $\square$

Remarque 3. Le résultat reste vrai en composant également à gauche par un foncteur G, car le défaut d'exactitude de la composition à gauche disparaît lorsqu'on applique $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, -)$ [18, théorème 3.1].

*Jusqu'à la fin de l'article, on suppose désormais que $p = 2$, et que B est un foncteur booléen **sans terme constant**.*

5.2. *Calcul de* $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}, S^n \circ B)$

Soit $\phi_{n,m}(t) = \sum_{i \geqslant 0} t^i \cdot \dim \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\Gamma^n, \Lambda^m \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$ la série de Poincaré de l'espace vectoriel gradué $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^n, \Lambda^m \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$, et soit $\phi^B_{n,m}$ la série de Poincaré de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^n, \Lambda^m \circ B)$. Pour simplifier, on écrira ϕ^B pour $\phi^B_{1,1}$ (série de Poincaré de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, B)$).

Si n n'est pas une puissance de 2, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ B) = 0$, car S^n est dans ce cas un facteur direct dans un produit tensoriel. Ainsi, pour déterminer $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ B)$, il suffit de calculer $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ B)$.

Théorème 5. *Soit B un foncteur booléen sans terme constant. On a une relation de modules à droite sur l'algèbre de Yoneda* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$:

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ B\big) = \mathrm{Ext}^{*-2^h+1}_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ B\big) \oplus \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^{h-1}} \circ B\big).$$

En particulier, les séries génératrices sont données par :

$$\phi_{1,2^h}(t) = t^{2^h-1} \prod_{i=1}^{h} \frac{1}{1 - t^{2^i-1}} \quad \textit{et} \quad \phi^B_{1,2^h}(t) = \phi^B(t) \cdot \phi_{1,2^h}(t).$$

Démonstration. Le corollaire 7 donne :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ B\big) = \bigoplus_{\underline{\lambda}} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, \Lambda\big(\underline{\nu}(\underline{\lambda})\big) \circ B\big),$$

la somme étant prise sur toutes les partitions 2-adiques $\underline{\lambda}$ de 2^h. Or $\Lambda(\underline{\nu}(\underline{\lambda}))$ s'exprime comme un produit tensoriel de deux foncteurs sans termes constants dès lors que toutes les parts de $\underline{\lambda}$ n'ont pas la même taille, c'est-à-dire dès lors que $\underline{\lambda}$ n'est pas égal aux partitions constituées de $2^{h-\ell}$ parts identiques de taille 2^ℓ. D'après le théorème de Pirashvili, on obtient alors

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ B\big) = \bigoplus_{\ell=0}^{h} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, \Lambda^{2^\ell} \circ B\big). \tag{17}$$

En utilisant l'égalité similaire pour $S^{2^{h-1}}$, on obtient

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ B\big) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, \Lambda^{2^h} \circ B\big) \oplus \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^{h-1}} \circ B\big). \tag{18}$$

On termine en appliquant le lemme 5.

Pour obtenir les séries génératrices, on constate que l'expression (18) fournit, grâce au lemme 5 une relation sur les séries génératrices :

$$\frac{\phi^B_{1,2^h}(t)}{t^{2^h-1}} = \phi^B_{1,2^h}(t) + \frac{\phi^B_{1,2^{h-1}}(t)}{t^{2^{h-1}-1}}.$$

On conclut sachant que $\phi_{1,1}(t) = 1$. $\square$

Proposition 10. *Le module d'extensions* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$ *a une structure de module triviale sur l'algèbre de Yoneda* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$.

Démonstration. C'est évident pour $h = 0$, puisque $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$ est nul si $i > 0$ et vaut $\mathbb{F}_2$ si $i = 0$. Soit $h \geqslant 1$, et supposons la proposition vraie pour $h-1$. Soit e une extension de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$, non nulle et non égale à l'identité. On veut montrer que pour toute extension f de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$, le produit de Yoneda $f \cdot e$ est nul. Si f est dans $\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$, avec $m < 0$, c'est évident. Supposons que ce soit vrai pour tout f' de degré $m' < m$, et soit f un élément de $\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$. D'après le théorème 5, f se décompose en

$$f = f' + f'',$$

où f' est un élément de $\mathrm{Ext}^{m-2^h+1}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$ et f'' un élément de $\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^{h-1}} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$. Comme cette décomposition est compatible avec la structure de module, on a

$$f \cdot e = f' \cdot e + f'' \cdot e.$$

Or, $f' \cdot e$ est nul d'après l'hypothèse de la récurrence sur m, et $f'' \cdot e$ est nul d'après l'hypothèse de la récurrence sur h. Ainsi, $f \cdot e = 0$. $\square$

On adapte facilement cette démonstration pour montrer le :

Théorème 6. *Soit B un foncteur booléen sans terme constant. En tant que module sur l'algèbre de Yoneda* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$*, on a* :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ B\big) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, B) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^h} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}\big),$$

l'action de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ *se faisant sur le premier facteur du produit tensoriel.*

D'après l'exemple 3, $\Gamma^{h_2} \circ \cdots \circ \Gamma^{h_k} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}$ est un foncteur booléen. Grâce au théorème 5, au lemme 5 et sa version duale (obtenue à l'aide du dual du complexe de Koszul), on en déduit le résultat suivant, par une récurrence immédiate sur le nombre de facteurs dans la composition.

Corollaire 10. *Le module gradué* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^{h_1}} \circ \cdots \circ S^{2^{h_k}} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$ *est le module trivial d'espace sous-jacent décrit par la série*

$$\prod_{i=1}^{h_1} \frac{1}{1-t^{2^i-1}} \cdots \prod_{i=1}^{h_k} \frac{1}{1-t^{2^i-1}}.$$

Remarquons pour terminer que grâce aux décompositions des corollaires 8 et 9, le théorème 5 permet d'obtenir une description des modules $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^\infty} \circ B)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, I_{\mathbb{F}_2} \circ B)$. En particulier, lorsque $B = \overline{I_{\mathbb{F}_2}}$, la structure de module est triviale, et dans le cas général, on obtient des égalités de modules :

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^\infty} \circ B) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, B) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^\infty} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}), \\ \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, I_{\mathbb{F}_2} \circ B) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, B) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, I_{\mathbb{F}_2} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}). \end{cases}$$

5.3. *Calcul de* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \Lambda^2 \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$

La première suite spectrale d'hypercohomologie de $\mathrm{Ko}_2^\bullet \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}$ vaut en rang 1 :

- $\mathbf{I}_1^{0,*}(\Gamma^2, \mathrm{Ko}_2^\bullet \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \Lambda^2 \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$;
- $\mathbf{I}_1^{1,*}(\Gamma^2, \mathrm{Ko}_2^\bullet \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \overline{I_{\mathbb{F}_2}} \otimes \overline{I_{\mathbb{F}_2}}) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, \overline{I_{\mathbb{F}_2}}) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$;
- $\mathbf{I}_1^{2,*}(\mathrm{Ko}_2^\bullet, \Lambda^2 \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, S^2 \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \Lambda^2 \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}) \oplus \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$.

Puisque $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$ sont tous deux nuls en degré strictement positif, et valent $\mathbb{F}_2$ en degré 0, on obtient les séries de Poincaré suivantes en rang 1 (pour le degré total) :

- $\phi_{2,2}$ pour la colonne 0 ;
- t pour la colonne 1 ;
- $t^2(1+\phi_{2,2})$ pour la colonne 2.

La différentielle d_1 est concentrée sur la ligne 0. De plus, la projection de la différentielle sur le facteur direct $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$ de la colonne 2 est le morphisme induit sur les $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{F}}$ par le produit

$$\overline{I_{\mathbb{F}_2}} \otimes \overline{I_{\mathbb{F}_2}} \to \overline{I_{\mathbb{F}_2}}.$$

On montre sans peine qu'il s'agit d'un isomorphisme. Ainsi, en rang 2, seules les colonnes 0 et 2 sont non nulles, de séries de Poincaré (pour le degré total) $\phi_{2,2}$ et $t^2\phi_{2,2}$ respectivement. La suite spectrale étant d'aboutissement nul (car le complexe de Koszul est acyclique), la différentielle d_2 est un isomorphisme entre ces deux colonnes. Par conséquent, $t \cdot \phi_{2,2}(t) = \phi_{2,2}(t)$, puis $\phi_{2,2}(t) = 0$. On a montré :

Proposition 11. $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \Lambda^2 \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}) = 0$.

5.4. *Calcul de* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \Lambda^{2^h+2^k} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$, $h < k$

La méthode exposée ici n'est pas la seule possible, ni forcément la plus simple. Elle a l'avantage de montrer comment utiliser le corollaire 7.

Soit $\Lambda^\bullet_m$ le complexe obtenu en prenant la partie de degré m de la construction Cobar réduite de Λ^* :

$$\Lambda^\bullet_m : \Lambda^m \to \bigoplus_{\substack{i+j=m\\ i,j>0}} \Lambda^i \otimes \Lambda^j \to \cdots \to \left(\Lambda^1\right)^{\otimes m}.$$

Par convention, Λ^m est en degré cohomologique 1. La cohomologie de $\Lambda^\bullet_m$ est S^m en degré m, et 0 sinon.

Soit $h \neq k$. D'après la remarque 2, seules les colonnes 1 et 2 de la suite spectrale $\mathbf{I}(\Gamma^2, \Lambda^\bullet_{2^h+2^k} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$ sont non nulles :

- $\mathbf{I}_1^{1,*}(\Gamma^2, \Lambda^\bullet_{2^h+2^k} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, \Lambda^{2^h+2^k} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$;
- $\mathbf{I}_1^{2,*}(\Gamma^2, \Lambda^\bullet_{2^h+2^k} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}) = \bigoplus_{i+j=2^h+2^k} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, (\Lambda^i \otimes \Lambda^j) \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$.

Or, si $i \neq 2^h$ et $i \neq 2^k$, alors au moins un des deux indices i et j n'est pas une puissance de 2, et $\Lambda^i \otimes \Lambda^j$ est un facteur direct d'un produit tensoriel de trois foncteurs sans terme constant. Ainsi, le groupe d'extension correspondant est nul. La deuxième colonne est donc égale à

$$\mathbf{I}_1^{2,*}\left(\Gamma^2, \Lambda^\bullet_{2^h+2^k} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}\right) = \left(\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^1, \Lambda^{2^h} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}\right) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^1, \Lambda^{2^k} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}\right)\right)^{\oplus 2}.$$

De plus, le morphisme de coproduit $\Lambda^{2^h+2^k} \to \Lambda^{2^h} \otimes \Lambda^{2^k}$ est une inclusion directe (car $h \neq k$). Ainsi, la différentielle d_1 réalise une injection de la colonne d'abscisse 1 dans chacun des deux facteurs

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^1, \Lambda^{2^h} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}\right) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^1, \Lambda^{2^k} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}}\right)$$

de la seconde colonne. En particulier, d_1 est injective, et la suite spectrale dégénère au rang 2. Soit $\psi_{n,m}$ la série de Poincaré de l'aboutissement de la suite spectrale $\mathbf{I}(\Gamma^n, \Lambda^\bullet_m \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$. On obtient donc :

$$\psi_{2,2^h+2^k}(t) = 2t^2\phi_{1,2^h}(t)\phi_{1,2^k}(t) - t^2\phi_{2,2^h+2^k}(t). \tag{19}$$

La seconde suite spectrale est nulle, sauf sur sa ligne $2^h + 2^k$, sur laquelle elle est égale en rang 2 à $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, S^{2^h+2^k} \circ \overline{I_{\mathbb{F}_2}})$. En utilisant le corollaire 7 et la remarque 2, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{II}_2^{*,2^h+2^k}\big(\Gamma^2, \Lambda^{\bullet}_{2^h+2^k}\circ\overline{I_{\mathbb{F}_2}}\big)\\
&\quad=\bigoplus_{i=0}^{h}\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\Gamma^2, \Lambda^{2^{h-i}+2^{k-i}}\circ\overline{I_{\mathbb{F}_2}}\big)\oplus\bigoplus_{\substack{i\leqslant h,\ j\leqslant k\\ i\neq j}}\big(\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\Gamma^1, \Lambda^{2^{h-i}}\circ\overline{I_{\mathbb{F}_2}}\big)\\
&\qquad\otimes\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\Gamma^1, \Lambda^{2^{k-j}}\circ\overline{I_{\mathbb{F}_2}}\big)\big).
\end{aligned}$$

On obtient donc à l'aboutissement :

$$\psi_{2,2^h+2^k}(t)=t^{2^h+2^k}\sum_{i=0}^{h}\phi_{2,2^{h-i}+2^{k-i}}(t)+t^{2^h+2^k}\sum_{\substack{i\leqslant h,\ j\leqslant k\\ i\neq j}}\phi_{1,2^{h-i}}(t)\phi_{1,2^{k-j}}(t). \qquad (20)$$

En comparant (19) et (20), et en utilisant les relations de récurrence vérifiées par les séries $\phi_{1,2^h}$, on obtient :

Proposition 12. *Pour tout $h\neq k$, $\phi_{2,2^h+2^k}=\phi_{1,2^h}\phi_{1,2^k}$.*

Remarque 4. La démonstration ci-dessous explique mieux la remarquable simplicité de cet énoncé.

Soit m la multiplication $S^{2^h}\otimes S^{2^k}\to S^{2^h+2^k}$, et μ la comultiplication $S^{2^h+2^k}\to S^{2^h}\otimes S^{2^k}$ dans l'algèbre de Hopf S^*. Par un résultat classique, la composition

$$S^{2^h+2^k}\xrightarrow{\mu}S^{2^h}\otimes S^{2^k}\xrightarrow{m}S^{2^h+2^k}$$

est l'identité si $h\neq k$. La comultiplication μ induit donc une inclusion directe

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\Gamma^2, S^{2^h+2^k}\big)\to\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\Gamma^2, S^{2^h}\otimes S^{2^k}\big).$$

Soit ℓ un entier tel que $0\leqslant\ell\leqslant h$. On définit un morphisme f_ℓ par la composition

$$\begin{aligned}
S^{2^h}\otimes S^{2^k}&\xrightarrow{\mu\otimes\mu}S^{2^h-\ell}\otimes S^{\ell}\otimes S^{2^k-\ell}\otimes S^{\ell}\xrightarrow{\mathrm{tw}}S^{2^h-\ell}\otimes S^{\ell}\otimes S^{2^k-\ell}\otimes S^{\ell}\\
&\xrightarrow{m\otimes m}S^{2^h}\otimes S^{2^k},
\end{aligned}$$

où tw consiste en l'échange des deux facteurs égaux à S^ℓ. Alors,

$$\mu\circ m=\sum_{\ell=0}^{h}f_\ell.$$

Comme tous les morphismes f_ℓ se factorisent par un produit tensoriel de strictement plus de deux termes non triviaux, sauf si $\ell=0$, on en déduit, d'après la remarque 2, que l'endomorphisme induit par $\mu \circ m$ sur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\Gamma^2, S^{2^h} \otimes S^{2^k})$ est l'identité. Ainsi

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\Gamma^2, S^{2^h+2^k}\big) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\Gamma^2, S^{2^h} \otimes S^{2^k}\big) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^h}\big) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{Id}, S^{2^k}\big).$$

Précomposer par le foncteur $\overline{I_{\mathbb{F}_2}}$, ou tout autre foncteur sans terme constant, ne change rien à l'argument ci-dessus.

Remerciements

L'essentiel de ce travail a été effectué à l'Université Paris 13. Je tiens à remercier tout particulièrement Lionel Schwartz et Geoffrey Powell pour leurs suggestions et remarques constructives.

Références

[1] S. Betley, Ext-groups for the composition of functors, in: Algebraic Topology: Categorical Decomposition Techniques, in: Progr. Math., vol. 215, Birkhäuser, 2003, pp. 31–45.

[2] S. Betley, Stable derived functors, the Steenrod algebra and homological algebra in the category of functors, Fund. Math. 168 (2001) 279–293.

[3] L. Breen, Extensions du groupe additif, Publ. Inst. Hautes Études Sci. 48 (1978) 39–125.

[4] D. Carlisle, N. Kuhn, Subalgebras of the Steenrod algebra and the action of matrices on truncated polynomial algebras, J. Algebra 121 (1989) 370–387.

[5] H. Cartan, S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[6] V. Franjou, Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques, J. Algebra 179 (2) (1996) 501–522.

[7] V. Franjou, E. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, General linear and functor cohomology over finite fields, Ann. of Math. 150 (2) (1999) 663–728.

[8] V. Franjou, J. Lannes, L. Schwartz, Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis, Invent. Math. 115 (1994) 513–538.

[9] E. Friedlander, A. Suslin, Cohomology of finite group schemes over a field, Invent. Math. 127 (2) (1997) 209–270.

[10] H.-W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, Analytic functors, unstable algebras and cohomology of classifying spaces, in: Algebraic Topology, Proceedings, Northwestern University, CT, 1988, in: Contemp. Math., vol. 96, 1989, pp. 197–220.

[11] M. Latapy, Partitions of an integer into powers, in: DM-CCG, 2001, in: Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., vol. AA, 2001, pp. 215–228.

[12] T. Pirashvili, Higher additivizations, Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR 91 (1988) 44–54 (in Russian).

[13] T. Pirashvili, Dold–Kan type theorem for Γ-groups, Math. Ann. 318 (2000) 277–298.

[14] L. Piriou, L. Schwartz, Extensions de foncteurs simples, K-theory 15 (3) (1998) 269–291.

[15] B. Richter, Taylor towers for Γ-modules, Ann. Inst. Fourier 51 (4) (2001) 995–1023.

[16] L. Schwartz, Unstable Modules over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Set Conjecture, Univ. of Chicago Press, 1994.

[17] A. Troesch, Cohomologie de compositions de puissances symétriques, C. R. Acad. Sci. Paris 333 (2001) 509–512.

[18] A. Troesch, Quelques calculs de cohomologie de compositions de puissances symétriques, Comm. Algebra 30 (7) (2002) 3351–3382.

[19] A. Troesch, Cohomologie de compositions de puissances symétriques en caractéristique 2, Prépublication du LAGA (Paris 13), no. 2002-12.