Journal of Number Theory 153 (2015) 230–269

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Number Theory

www.elsevier.com/locate/jnt

# Hauteurs canoniques des sous-variétés toriques

Mounir Hajli

*National Center for Theoretical Sciences, Taipei Office, National Taiwan University, Taipei 106, Taiwan*

INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*
Reçu le 8 février 2014
Reçu en forme révisée le 10 novembre 2014
Accepté le 12 janvier 2015
Disponible sur Internet le 5 mars 2015
Communiqué par David Goss

*Keywords:*
Toric variety
Canonical height
Arakelov geometry

RÉSUMÉ

On présente une formule explicite pour les hauteurs canoniques pour une classe de sous-variétés toriques projectives au sens de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky. Notre approche donne une alternative partielle aux calculs de [19].



**Table des matières**



*Adresse e-mail :* hajlimounir@gmail.com.

http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2015.01.009
0022-314X/

## 1. Introduction

La hauteur d'une variété arithmétique est un analogue arithmétique du degré géométrique, mesurant la complexité de la variété. Il est connu que le calcul explicite des hauteurs est une tâche très difficile et compliquée. Il y a peu d'exemples de calculs d'hauteur d'une variété. Le cas torique resprésente une situation particulière et intéressante. L'arithmétique des variétés toriques a été etudiée de manière intense par plusieurs auteurs. Dans [19], Philippon et Sombra présentent une expression explicite pour la hauteur normalisée du translaté d'une variété torique projective définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, cf. [19, Théorème 0.1]. Cette expression se décompose comme somme de contributions locales, chaque terme étant l'intégrale d'une certaine fonction concave et affine par morceaux, définie sur le polytope $Q_{\mathcal{A}}$. Leur démarche pour démonter leur formule s'appuie sur le calcul d'une fonction de Hilbert arithmétique appropriée, au lieu d'utiliser la définition de la hauteur normalisée. Dans [5], les auteurs établissent une formule intégrale pour la hauteur d'une variété torique projective par rapport à un fibré en droites équivariant muni d'une métrique hermitienne, continue et invariante par l'action du tore compact de la variété (voir [5, Theorem 5.1.4]). Ils déduisent (voir [5, Corollary 5.2.6]) une nouvelle preuve pour le résultat de Philippon et Sombra [19].

Rappelons le résultat majeur de [19]. Soit $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de dimension $n$. Soit $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{Z}^d$. Soit $L_{\mathcal{A}}$ le sous-module engendré par les différences des vecteurs $a_0, \ldots, a_n$. Soit $\beta \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$. On note par $X_{\mathcal{A},\beta}$ la variété torique au sens de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky associée à $\mathcal{A}$ (voir les rappels de la section 2). Soit $K$ un corps de nombres approprié tel que $\beta \in (K^*)^{n+1}$. Philippon et Sombra associent à $X_{\mathcal{A},\beta}$ une famille de fonctions $(\vartheta_{\mathcal{A},\beta,v})$ indexée par $M_K$, l'ensemble des places du corps $K$, où chaque fonction $\vartheta_{\mathcal{A},\beta,v}$ est donnée comme suit

$$\vartheta_{\mathcal{A},\beta,v} : Q_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{y \in \mathbb{R} | \, (x, y) \in Q_{\mathcal{A},\beta,v}\},$$

avec $Q_{\mathcal{A},\beta,v} := \operatorname{Conv}\big((a_0, \log|\beta_0|_v), \ldots, (a_n, \log|\beta_n|_v)\big) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ et $Q_{\mathcal{A}} := \operatorname{Conv}(a_0, \ldots, a_n) \subset \mathbb{R}^d$. Notons que que la détermination de $\vartheta_{\mathcal{A},\beta,v}(x)$ pour $x \in Q_{\mathcal{A}}$ est un problème d'optimisation linéaire. En effet, trouver $\vartheta_{\mathcal{A},\beta,v}(x)$ est équivalent à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } < \lambda, c > \\ \text{sous les contraintes } B\lambda = b \\ \text{et } \lambda \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $c = (-\log|\beta_0|_v, \ldots, -\log|\beta_n|_v)$, $B$ est une matrice de taille $(d+1) \times n$ et $b$ un vecteur de $\mathbb{R}^{d+1}$ qui s'écrivent en fonction des $a_0, \ldots, a_n$, $(1, \ldots, 1)$ et de $x$. La théorie de l'optimisation linéaire affirme que si $\lambda^*$ est une solution optimale de (1), alors $\lambda^*$ appartient au bord d'un polytope convexe défini par les contraintes du problème en question. Il existe plusieurs algorithmes de résolution de (1), par exemple la méthode du

Simplexe. Philippon et Sombra dans [19] donnent une formule pour $\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\beta})$, la hauteur normalisée de $X_{\mathcal{A},\beta}$ en fonction des $\vartheta_{\mathcal{A},\beta,v}$ pour $v \in M_K$. Plus précisément, ils établissent le résultat suivant

$$\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\beta}) = (d+1)! \sum_{v\in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \int\limits_{Q_{\mathcal{A}}} \vartheta_{\mathcal{A},\beta,v} dx_1 \cdots dx_d,$$

voir [19, Théorème 3.6].

Le résultat de Philippon et Sombra s'applique donc à toute sous-variété torique $X_{\mathcal{A},\beta}$ translatée par $\beta \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$ quelconque. En observant que les fonctions $\vartheta_{\mathcal{A},\beta,v}$ sont affines par morceaux, alors on peut expliciter les intégrales dans la formule de la hauteur en utilisant les techniques de la programmation linéaire. Notons que la méthode de [19] a été généralisée aux fibrés en droites hermitiens semipositifs, voir [4] pour plus de détails.

Dans cet article, nous proposons une alternative partielle à l'approche de [19] pour le calcul des hauteurs canoniques pour une classe de variétés toriques projectives. Notre méthode s'appuie essentiellement sur la définition de la hauteur canonique, en plus elle fournit un moyen pour le calcul explicite de la hauteur.

Soient $K$ un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Soit $\mathcal{X}$ une variété arithmétique (projective) de dimension $n$ sur $\mathcal{S} := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et note par $\pi$ le morphisme structural. On renvoie à [14], ainsi qu'à [2] pour la construction des groupes de Chow arithmétiques. On rappelle (voir par exemple [2, §2.1.3]) que l'on dispose de deux morphismes :

$$\deg : \widehat{CH}^0(\mathcal{S}) = CH^0(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \widehat{\deg} : \widehat{CH}^1(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui induisent par composition avec $\pi_* : \widehat{CH}^*(\mathcal{X}) \longrightarrow \widehat{CH}^{*-n}(\mathcal{S})$ les morphismes :

$$\deg : CH^n(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{(degré géométrique)},$$
$$\widehat{\deg} : \widehat{CH}^{n+1}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{(degré arithmétique)}.$$

On considère $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K} = \mathrm{Proj}\big(\mathcal{O}_K[T_0,\dots,T_n]\big)$ l'espace projectif de dimension $n$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Soit $Z$ un cycle sur $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}$, on note par $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(Z)$ la hauteur canonique de $Z$, où $\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty$ est le fibré universel sur $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}$ muni de sa métrique canonique (voir [18, Proposition–définition 5.5.1] ou [22]).

### *1.1. Résultats et stratégie de la preuve*

Soit $\beta = (\beta_0,\dots,\beta_n) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$. Soient $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $\mathcal{A} = \{a_1,\dots,a_n\}$ une sous-famille de vecteurs de $\mathbb{Z}^d$ de cardinal $n$ tels que $L_{\mathcal{A}} := \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n = \mathbb{Z}^d$. On considère $X_{\mathcal{A},\beta}$ la variété torique associée (voir rappels de la section 2). Soit $K$ un corps de nombres de définition de $X_{\mathcal{A},\beta}$. La donnée $\mathcal{A}$ définit $n-d$ polynômes homogènes $R_1,\dots,R_{n-d}$. Dans cet article, on suppose que $X_{\mathcal{A},\beta}$ satisfait les hypothèses suivantes :

1. Les polynômes $R_1, \dots, R_{n-d}$ définissent $X_{\mathcal{A},\beta}$.
2. $Z(R_k, R_{k+1}, \dots, R_{n-d})$, la variété projective définie par $R_k, \dots, R_{n-d}$, est intègre pour tout $k = 1, \dots, n-d$.

En particulier, $X_{\mathcal{A},\beta}$ est une intersection complète. Voir 3.3 pour des exemples. Pour simplifier, on dira que $X_{\mathcal{A},\beta}$ satisfait l'hypothèse $\mathscr{A}$, si (1.) et (2.) sont vérifiés. Aussi, on suppose qu'il existe $F$, un corps de nombres tel que son anneau des entiers $\mathcal{O}_F$ soit un anneau factoriel et que $\beta \in (F^*)^{n+1}$. Sous cette hypothèse, on vérifie (voir Lemme 3.4) que pour tout $i \in \{1, \dots, n-d\}$, il existe $\tau_i \in K$ tel que

$$(R_i) \cap \mathcal{O}_K[T_0, \dots, T_n] = (\tau_i R_i).$$

Notons que la condition $\mathscr{A}$ ne dépend pas de $\beta$ (voir Remarque 3.2).

On note par $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}$ la clôture de Zariski de $X_{\mathcal{A},\beta}$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}$. On se propose de donner une expression explicite pour $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta})$ en fonction de $\beta$ et de $\mathcal{A}$. La condition $\mathscr{A}$ combinée avec Lemme 3.8 nous permet de construire $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_1,\beta} := \mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}, \mathcal{X}_{\mathcal{A}_2,\beta}, \dots, \mathcal{X}_{\mathcal{A}_{n-d},\beta}$ des sous-schémas toriques intègres de $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}$ avec

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta} =: \mathcal{X}_{\mathcal{A}_1,\beta} \subsetneq \mathcal{X}_{\mathcal{A}_2,\beta} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{X}_{\mathcal{A}_{n-d},\beta} \subsetneq \mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}, \tag{2}$$

et tels que chaque $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_i,\beta}$ soit une hypersurface dans $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}$ donnée par $s_i := \tau_i R_i$ pour tout $i = 1, \dots, n-d-1$ et $X_{\mathcal{A}_{n-d},\beta}$ est une hypersurface de $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}$ donnée par $s_{n-d} = \tau_{n-d} R_{n-d}$, où $d$ est la dimension de $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}$.

Par la formule de Faltings (voir [18, Théorème 5.5.6]) on a pour tout $j = 0, 1, \dots, n-d-1$

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_j,\beta}) = \deg(R_j) h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{j+1},\beta}) \\ + \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \int_{\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{j+1},\beta}(\mathbb{C})} \log\|s_j\|_{\sigma,\infty} c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty)^{j+d}, \end{aligned}$$

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{n-d},\beta}) = \deg(R_{n-d}) h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}) + \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \int_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} \log\|s_j\|_{\sigma,\infty} c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty)^n \tag{3}$$

Sachant que $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{n-d},\beta}) = h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}) = 0$ (voir [18, Proposition 7.1]). Alors, d'après la formule précédente, le calcul de $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_j,\beta})$ se déduira de celui de $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{j+1},\beta})$ si l'on détermine l'expression de

$$c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty)^{j+d+1}_{|\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{j+1},\beta}} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

C'est l'objet du théorème ci-dessous. Si $\mathcal{A}' = \{a'_1, \dots, a'_n\}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{Z}^{d+1}$ qui engendre $\mathbb{Z}^{d+1}$, nous montrons qu'il existe $S$ un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^{d+1}$ et un ensemble $(X_{\mathcal{A}'_{I_s},1})_{s \in S}$ de variétés toriques déterminés explicitement tels que :

**Théorème 1.1.** *(Voir Théorème 3.10.) Sur $\mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$, on a l'égalité de courants suivante :*

$$\omega_\beta^{d+1} := (*_{\mathcal{A}',\beta})^* \Big(c_1\big(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty\big)^{j+d+1}_{|\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{j+1},\beta}}\Big)$$
$$= \big(dd^c \log\max(|\beta\cdot t^{a'}|)\big)^{d+1} = \sum_{s\in S}\deg(X_{\mathcal{A}'_{I_s},1})\delta_{\mathbf{S}_s},$$

*avec $\beta = (1,\beta_1,\ldots,\beta_n) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$ et $|\beta\cdot t^{a'}| := \big(1, |\beta_1 t^{a'_1}|,\ldots,|\beta_n t^{a'_n}|\big)$ pour tout $t \in \mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$ et $\delta_{\mathbf{S}_s}$ est le courant intégration sur $\mathbf{S}_s$ (voir (24)).*

**Remarque 1.2.** Notons que la preuve du théorème ci-dessus permet de trouver explicitement l'ensemble $S$ et les coefficients $\deg(X_{\mathcal{A}'_{I_s},1})$.

En combinant l'équation (3) et le théorème précédent nous pouvons donc déterminer par récurrence la hauteur canonique des variétés toriques. Plus concrètement, on a le résultat suivant

**Théorème 1.3.** *(Voir Théorème 3.11.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \{1,\ldots,n-1\}$. Soit $\mathcal{A} := \{a_1,\ldots,a_n\}$ une sous-famille de $\mathbb{Z}^d$ de rang $d$. Soit $\beta \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$. On suppose que $X_{\mathcal{A},\beta}$ vérifie l'hypothèse $\mathscr{A}$ et que $\beta \in (F^*)^{n+1}$ où $F$ est un corps de nombres tel que son anneau des entiers est factoriel. On a,*

- *Si $d \leq n-1$. On note $\mathcal{A}' := \mathcal{A}_2$ (voir (17)) alors il existe $\tau \in K$ tel que*

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) = \deg(R_1)\, h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}',\beta}) + \deg(X_{\mathcal{A}',1})\log|N_K(\tau)|$$
$$+ \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\sum_{s_\sigma\in S_\sigma}\deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_\sigma}},1}) \int_{t\in\mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})} \log\frac{|Q_1(\beta\cdot t^{a'})|_\sigma}{\max(|\beta\cdot t^{a'}|_\sigma)^{\deg(R_1)}}\delta_{\mathbf{S}_{s_\sigma}}.$$

- *Si $d = n-1$, alors il existe aussi $\tau \in K$ tel que*

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) = \log|N_K(\tau)| + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\int_{t\in(\mathbb{S}^1)^n}\log|Q_1(t_1,\ldots,t_n)|_\sigma \frac{dt_1\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n}.$$

**Remarque 1.4.** Notons que le terme intégrale dans notre formule peut être simplifier (voir Remarque 3.16). Plus concrètement, on donne pour tout $j = 1,\ldots,n-d-1$ une formule pour

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_j,\beta}) - \deg(R_j)h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{j+1},\beta})$$

et

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{n-d},\beta}),$$

en fonction de $\beta$, $[K:\mathbb{Q}]$, $\tau_1,\dots,\tau_{n-d}$, $w_1,\dots,w_{n-d}$ et les éléments de $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_{n-d}$ (voir (31) et (32)). Ainsi, on dispose d'une formule pour $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta})$ en fonction de $\beta$, $\deg(R_1),\dots,\deg(R_{n-d})$, $[K:Q]$, $\tau_1,\dots,\tau_{n-d}$, $w_1,\dots,w_{n-d}$ et les éléments de $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_{n-d}$.

**Corollaire 1.5.** *(Voir Corollaire 3.17.) Soit $\beta=(1,\beta_1,\dots,\beta_n)\in(\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$. En gardant les mêmes hypothèses que dans 3.11, alors il existe $u_\mathcal{A}\in\mathbb{N}^{n-d}$ et $(v_{\mathcal{A},\sigma,i})_{\substack{\sigma:K\to\mathbb{C}\\ i=1,\dots,n}}$ une sous famille de $\mathbb{Q}^n$ tels que*

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta})=\sum_{i=1}^{n-d}u_{\mathcal{A},i}\log|N_K(\tau_i)|+\sum_{\substack{\sigma:K\to\mathbb{C}\\ i=1,\dots,n}}v_{\mathcal{A},\sigma,i}\log|\beta_i|_\sigma.$$

*On a,*

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta})\in\log(\overline{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{R}_{>0}).$$

*Donc, si $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta})\neq 0$, alors c'est un nombre transcendant.*

Dans Théorème 3.19 on donne un exemple de calcul d'hauteur canonique. On considère la courbe torique $\mathcal{X}_{\mathcal{A},c}\subset\mathbb{P}^3_\mathbb{Q}$ où $\mathcal{A}=\{1,-1,3\}$ et $c=(1,c_1,c_2,c_3)\in(\mathbb{Q}^*)^4$. On vérifiera que cette variété satisfait l'hypotèse $\mathscr{A}$ et que ici $F=\mathbb{Q}$ dont l'anneau des entiers est bien évidemment factoriel. En particulier, si $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{Z}$ avec $\gcd(c_i,c_j)=1$ pour tout $i\neq j\in\{1,2,3\}$ alors, on a

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},c})=2\log|c_1c_2|+\log\max(|c_1^2|,|c_2c_3|).$$

On peut se demander si notre approche peut être généraliser à des variétés toriques qui ne vérifient pas nécessairement les hypothèses précédentes. On propose alors une généralisation partielle qui consiste à étudier la hauteur canonique des variétés toriques qui sont image d'une variété $X_{A,\beta}$ satisfaisant les hypothèses précédentes, par un morphisme monomial $\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^N$ (voir Remarque 3.20).

## 2. La construction de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky

On note par $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, le corps des nombres rationnels.

Soit $\mathbb{T}^d=(\overline{\mathbb{Q}}^*)^d$ le tore algébrique et $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ l'espace projectif sur $\overline{\mathbb{Q}}$, de dimension $d$ et $n$ respectivement. Soit $\mathcal{A}=\{a_0,\dots,a_n\}$ une suite de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{Z}^d$. L'ensemble $\mathcal{A}$ définit une action de $\mathbb{T}^d$ sur $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ comme suit :

$$\begin{aligned}*_\mathcal{A}:\mathbb{T}^d\times\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})&\longrightarrow\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})\\ (s,x)&\longrightarrow[s^{a_0}x_0:\dots:s^{a_n}x_n],\end{aligned}$$

où $s^{a_i}:=\prod_{j=1}^d s^{a_{ij}}$ pour tout $i$.

Soit $X_{\mathcal{A},\alpha}$ l'adhérence de Zariski de l'image de l'application monomiale :

$$*_{\mathcal{A},\alpha} := *_{\mathcal{A}}|_\alpha : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}}), \quad s \to [\alpha_0 s^{a_0} : \cdots : \alpha_n s^{a_n}] \tag{4}$$

C'est une variété torique projective au sens de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky [13], c'est à dire une sous-variété de $\mathbb{P}^n$ stable par rapport à l'action de $\mathbb{T}^d$, avec une orbite dense $X^\circ_{\mathcal{A},\alpha} := \mathbb{T}^d *_{\mathcal{A}} \alpha$.

Dans la suite on suppose que $a_0 = 0$ (puisque $[\alpha_0 s^{a_0} : \cdots : \alpha_n s^{a_n}] = [\alpha_0 : \alpha_1 s^{a_1 - a_0} : \cdots : \alpha_n s^{a_n - a_0}]$).

**Proposition 2.1.** *La variété $X_{\mathcal{A},1}$ dépend uniquement de la géométrie affine de l'ensemble $\mathcal{A}$. En d'autres termes, soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}^e$ et $T : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{Z}^e$ une application affine injective et telle que $T(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Alors $X_{\mathcal{A},1}$ s'identifie naturellement à $X_{\mathcal{B},1}$.*

**Démonstration.** Voir [13, Proposition 1.2, p. 167]. □

**Exemple 2.2.** Dans $\mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}})$, on considère la sous-variété définie par le polynôme homogène suivant :

$$P(x, y, z) = y^2 - zx$$

C'est une variété torique au sens de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky. En effet c'est l'adhérence de Zariski de l'image du morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}}) \\ s &\longrightarrow [1 : s : s^2]. \end{aligned}$$

Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $d \in \{1, \ldots, n-1\}$. On pose $A$, la matrice d'ordre $n \times d$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

D'après 2.1, on peut supposer qu'elle est de rang $d$. On pose $\mathcal{A} := \{a_1, \ldots, a_n\}$. C'est une sous-famille de vecteurs de $\mathbb{Z}^d$, qu'on fixe dans la suite. On suppose que $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^d$.

**Lemme 2.3.** *Soit $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \left(\mathbb{Z} \setminus \{0\}\right)^n$, alors*

$$T := x^\nu - 1,$$

*est irréductible dans $\mathbb{Z}\left[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}\right]$ si et seulement si $\nu_1, \ldots, \nu_n$ sont premiers entre eux.*

**Démonstration.** Soit $\nu_1, \ldots, \nu_n$ $n$ entiers non tous nuls. On considère le polynôme de Laurent $T$ suivant :

$$T(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} - 1. \tag{5}$$

Si l'on note par $d$ le plus grand diviseur commun des $\nu_1, \ldots, \nu_n$, alors $T$ est réductible, si $d > 1$. En effet, on a $T = \left(x_1^{\frac{\nu_1}{d}} \cdots x_n^{\frac{\nu_n}{d}}\right)^d - 1$ qui est réductible dans $\mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$.

S'il existe $p_1, \ldots, p_n$ $n$ entiers tels que $p_1\nu_1 + \ldots + p_n\nu_n = 1$, on va montrer que $T$ est irréductible. Supposons qu'il existe $P$ et $Q$ deux polynômes de Laurent dans $\mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$ tels que :

$$T(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n)Q(x_1, \ldots, x_n). \tag{6}$$

On considère l'ensemble suivant $E := \{1 \leq i \leq n \mid p_i \neq 0\}$ et soit $l$ son cardinal. Quitte à réordonner les indices, on peut supposer que $E = \{1, 2, \ldots, l\}$. On pose :

$$\begin{cases} x_i = y_i^p & \text{si } 1 \leq i \leq l \\ x_i = y_i & \text{si } l+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

En remplaçant dans (6), on a dans $\mathbb{Z}[y_1, y_1^{-1}, \ldots, y_n, y_n^{-1}]$ :

$$y_1^{p_1\nu_1} \cdots y_l^{p_l\nu_l} y_{l+1}^{\nu_{l+1}} \cdots y_n^{\nu_n} - 1 = P(y_1^{p_1}, \ldots, y_l^{p_l}, y_{l+1}, \ldots, y_n)Q(y_1^{p_1}, \ldots, y_l^{p_l}, y_{l+1}, \ldots, y_n).$$

Comme $p_1\nu_1 + \ldots + p_n\nu_n = 1$, l'égalité ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} & y_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{p_2\nu_2} \cdots \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{p_l\nu_l} y_l^{p_l\nu_l} y_{l+1}^{\nu_{l+1}} \cdots y_n^{\nu_n} - 1 \\ & \quad = P(y_1^{p_1}, \ldots, y_l^{p_l}, y_{l+1}, \ldots, y_n)Q(y_1^{p_1}, \ldots, y_l^{p_l}, y_{l+1}, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{7}$$

En posant dans (7),

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_i = \dfrac{y_i}{y_1} & \text{si } 2 \leq i \leq l \\ z_i = y_i & \text{si } i \geq l+1, \end{cases}$$

on obtient, dans $\mathbb{Z}[z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_n, z_n^{-1}]$ :

$$z_1 z_2^{p_2\nu_2} \cdots z_l^{p_l\nu_l} z_{l+1}^{\nu_{l+1}} \cdots z_n^{\nu_n} - 1 = \widetilde{P}\widetilde{Q}, \tag{8}$$

oùon a posé $\widetilde{P} = P(z_1, (z_1z_2)^{p_2}, \ldots, (z_1z_l)^{p_l}, z_{l+1}, \ldots, z_n)$ et $\widetilde{Q} = Q(z_1, (z_1z_2)^{p_2}, \ldots, (z_1z_l)^{p_l}, z_{l+1}, \ldots, z_n)$.

Quitte à remplacer $z_i$ par $z_i^{-1}$ pour $1 \leq i \leq n$, on peut supposer que $z_1 z_2^{p_2\nu_2} \cdots z_l^{p_l\nu_l} \times z_{l+1}^{\nu_{l+1}} \cdots z_n^{\nu_n} - 1$ est un polynôme de $\mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_n]$. Il existe $\widetilde{\nu} \in \mathbb{N}^n$ et $\widetilde{\mu} \in \mathbb{N}^n$ tels que

$$\widetilde{P} = \frac{P_1}{z^{\widetilde{\nu}}} \quad \text{et} \quad \widetilde{Q} = \frac{Q_1}{z^{\widetilde{\mu}}},$$

avec $P_1 = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu z^\nu$ et $Q_1 = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} b_\nu z^\nu$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ et tels que

$$z_1 z_2^{p_2 \nu_2} \cdots z_l^{p_l \nu_l} z_{l+1}^{\nu_{l+1}} \cdots z_n^{\nu_n} - 1 = \frac{P_1}{z^{\widetilde{\nu}}} \frac{Q_1}{z^{\widetilde{\mu}}}.$$

Si l'on note par $S(P)$ (resp. $S(Q)$) l'ensemble des $\nu \in \mathbb{N}^n$ tels que $a_\nu \neq 0$ (resp. $b_\nu \neq 0$) alors, on voit que :

$$\nu + \nu' \geq \widetilde{\nu} + \widetilde{\mu} \quad \forall\, \nu \in S(P), \forall\, \nu' \in S(Q). \tag{9}$$

On peut supposer que

$$\widetilde{\nu}_i + \widetilde{\mu}_i \neq 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Donc, il existe $i_0$ et $\nu^{(0)} \in S(P)$ et $\nu'^{(0)} \in S(Q)$ tels que

$$\inf_{\substack{0 \leq i \leq n \\ \nu \in S(P),\, \nu' \in S(Q)}} \left(\nu_i + \nu'_i\right) = \nu_{i_0}^{(0)} + \nu'^{(0)}_{i_0} \neq 0.$$

Supposons, par exemple que $\nu_{i_0}^{(0)} \geq \widetilde{\nu}_{i_0}$ (ce qui est possible d'après (9)). On écrit alors

$$\frac{P_1}{z^{\widetilde{\nu}}} \frac{Q_1}{z^{\widetilde{\mu}}} = \left(\frac{P_1}{z_{i_0}^{\widetilde{\nu}_{i_0} + \widetilde{\mu}_{i_0} - \min(\widetilde{\mu}_{i_0}, \nu'^{(0)}_{i_0})} \widehat{z}^{\widetilde{\nu}}}\right)\left(\frac{Q_1}{z_{i_0}^{\min(\widetilde{\mu}_{i_0}, \nu'^{(0)}_{i_0})} \widehat{z}^{\widetilde{\mu}}}\right)$$

où $\widehat{z}^{\widetilde{\nu}}$ et $\widehat{z}^{\widetilde{\mu}}$ sont des monômes qui ne contiennent pas une puissance de $z_{i_0}$. Comme

$$\nu_{i_0}^{(0)} + \nu'^{(0)}_{i_0} \geq \widetilde{\nu}_{i_0} + \widetilde{\mu}_{i_0},$$

et qu'on a supposé $\nu_{i_0}^{(0)} \geq \widetilde{\nu}_{i_0}$ alors

$$\frac{P_1}{z_{i_0}^{\widetilde{\nu}_{i_0} + \widetilde{\mu}_{i_0} - \min(\widetilde{\mu}_{i_0}, \nu'^{(0)}_{i_0})} \widehat{z}^{\widetilde{\nu}}} \quad \text{et} \quad \frac{Q_1}{z_{i_0}^{\min(\widetilde{\mu}_{i_0}, \nu'^{(0)}_{i_0})} \widehat{z}^{\widetilde{\mu}}},$$

sont deux éléments de

$$\mathbb{Z}\left[z_1^{\pm}, \ldots, z_{i_0-1}^{\pm}, z_{i_0}, z_{i_0+1}^{\pm}, \ldots, z_n^{\pm}\right].$$

On conclut par récurrence qu'on peut trouver $\widetilde{\nu}', \widetilde{\mu}' \in \mathbb{N}^n$ tels que $\widetilde{\nu} + \widetilde{\mu} = \widetilde{\nu}' + \widetilde{\mu}'$ et

$$z_1 z_2^{p_2 \nu_2} \cdots z_l^{p_l \nu_l} z_{l+1}^{\nu_{l+1}} \cdots z_n^{\nu_n} - 1 = \frac{P_1}{z^{\widetilde{\nu}'}} \frac{Q_1}{z^{\widetilde{\mu}'}},$$

avec

$$\widetilde{P}_1 := \frac{P_1}{z^{\widetilde{\nu}'}} \in \mathbb{Z}\big[z_1,\dots,z_n\big], \quad \widetilde{Q}_1 := \frac{Q_1}{z^{\widetilde{\mu}'}} \in \mathbb{Z}\big[z_1,\dots,z_n\big].$$

Si $\deg_{z_1} \widetilde{P}_1 \geq 1$, on écrit $\widetilde{P}_1 = R_1 \cdot z_1 - R_2$, avec $R_1 \neq 0$ et $R_2 \in \mathbb{Z}[z_2,\dots,z_n]$. De (8), on déduit que $R_2 \cdot \widetilde{Q}_1 = 1$, donc $\widetilde{Q}_1$ est une constante. Vu les changements de variables qu'on a effectué, il existe des entiers $\mu_1,\dots,\mu_n$ et une constante $c$ tels que $Q = c \cdot x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$. On conclut que $T$ est irréductible dans $\mathbb{Z}\big[x_1, x_1^{-1},\dots,x_n,x_n^{-1}\big]$. □

**Lemme 2.4.** *Si $A$ est de rang $d$, alors il existe $n-d$ vecteurs de $\mathbb{Z}^n$, $w_1,\dots,w_{n-d}$, tels que*

$$X^{\circ}_{\mathcal{A},1} = \big\{x \in \mathbb{T}^n \,\big|\, x^{w_{+i}} = x^{w_{-i}}, \forall\, 1 \leq i \leq n-d\big\}, \tag{10}$$

*où $w_{+i} := \big(\max(0,w_{i1}),\dots,\max(0,w_{in})\big)$ et $w_{-i} := \big(\max(0,-w_{i1}),\dots,\max(0,-w_{in})\big)$ pour $i = 1,\dots,n-d$ (de sorte qu'on a $w_i = w_{+i} - w_{-i}$). Réciproquement, si l'on se donne un ensemble de $n-d$ vecteurs $w_1,\dots,w_{n-d}$ de $\mathbb{Z}^n$ qu'on peut compléter en une base $\{w_1,\dots,w_n\}$ de $\mathbb{Z}^n$, alors il existe $\mathcal{A}$ un ensemble de $n$ vecteurs de $\mathbb{Z}^d$ tel qu'on a (10).*

**Démonstration.** Soit ${}^tA$ la matrice transposée de $A$, on a $\ker({}^tA)$ est un sous-groupe saturé de $\mathbb{Z}^n$ de rang $n-d$, par le théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal, voir par exemple [17, Theorem 7.8], il existe une base $\big\{w_1,\dots,w_n\big\}$ de $\mathbb{Z}^n$ telle que $\big\{w_1,\dots,w_{n-d}\big\}$ soit une base de $\ker({}^tA)$ et donc si l'on pose :

$$P_i(x) = x^{w_i} - 1 \in \mathbb{Z}\big[x_1, x_1^{-1},\dots,x_n,x_n^{-1}\big] \quad \forall\, i = 1,\dots,n-d,$$

alors par le lemme 2.3, ces polynômes sont irréductibles dans $\mathbb{Z}\big[x_1, x_1^{-1},\dots,x_n,x_n^{-1}\big]$.

Montrons que

$$P_j(X^{\circ}_{\mathcal{A},1}) = \{0\}, \text{ avec } j = 1,\dots,n-d.$$

Soit donc, $x \in X^{\circ}_{\mathcal{A},1}$. Par définition, il existe $t \in \mathbb{T}^d$ tel que $x = (1, t^{a_1},\dots,t^{a_n})$. On a $x^{w_j} = \prod_{i=1}^n t^{a_i w_{ji}} = \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^d t^{a_{ik} w_{ji}} = \prod_{k=1}^d t^{<a_k, w_j>} = 1$, pour tout $j = 1,\dots,n-d$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{T}^n$ tel que

$$x^{w_i} - 1 = 0, \quad \forall\, i = 1,\dots,n-d. \tag{11}$$

Si $i = 1,\dots,n$, on choisit un réel qu'on note $\arg(x_i)$, tel que $x_i = |x_i| \exp\big(2\pi\sqrt{-1} \times \arg(x_i)\big)$ et on pose $\arg(x) = \big(\arg(x_1),\dots,\arg(x_n)\big)$ et $\log|x| = \big(\log|x_1|,\dots,\log|x_n|\big)$. Alors, le système d'équations (11) est équivalent aux deux systèmes d'équations suivants :

$$< w_i, \log|x| >= 0, \quad i = 1,\dots,n-d, \tag{12}$$

$$k_i :=< w_i, \arg(x) >\in \mathbb{Z} \quad i = 1,\dots,n-d. \tag{13}$$

On vérifie que $\ker({}^tA)_{\mathbb{R}}$ et $A \cdot \mathbb{R}^d$ sont orthogonaux pour le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$, et comme $A$ est de rang $d$ et que ses vecteurs lignes engendrent $\mathbb{Z}^d$ par hypothèse, alors on a la somme directe orthogonale suivante :

$$\mathbb{R}^n = \ker({}^tA)_{\mathbb{R}} \oplus^{\perp} A \cdot \mathbb{R}^d. \tag{14}$$

On en déduit que (12) admet une solution, c'est à dire, il existe $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $|x| = \exp(A \cdot y)$.

Montrons qu'il existe $n$ entiers $v_1, \ldots, v_n$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} v_j < w_i, w_j >= k_i \quad i = 1, \ldots, n-d. \tag{15}$$

Pour cela, on pose $k := (k_1, \ldots, k_{n-d}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ et $G := (< w_i, w_j >)_{1 \leq i,j \leq n}$. On a, la matrice $G$ est inversible et son déterminant vaut 1, en fait, on peut écrire $G = {}^tW \cdot W$ avec $W$ est une matrice $n \times n$ inversible dans l'espace des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et dont les colonnes sont les vecteurs $w_1, \ldots, w_n$, qui forment une base de $\mathbb{Z}^n$ par hypothèse. Par conséquent, on peut trouver $\overline{v} \in \mathbb{Z}^n$ tel que

$$G \cdot \overline{v} = k.$$

On considère $\arg(x) - \overline{v}$ dans $\mathbb{R}^n$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}^d$ et $q \in \ker({}^tA)_{\mathbb{R}}$ tels que

$$\arg(x) - \overline{v} = q + A\theta.$$

Mais comme $< \arg(x), w_i >= k_i =< \overline{v}, w_i >$, alors $< q, w_i >= 0$ et cela pour tout $i = 1, \ldots, n-d$. C'est à dire que $q$ est orthogonal à $\ker({}^tA)_{\mathbb{R}}$, donc $q = 0$.

Si l'on pose

$$z := y + 2\pi\sqrt{-1}\theta,$$

alors

$$\begin{aligned}
\exp(Az) &= \exp(Ay + 2\pi\sqrt{-1}A\theta) \\
&= |x| \exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}(\arg(x) - \overline{v})\bigr) \\
&= |x| \exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}(\arg(x)\bigr) \quad \text{car } \overline{v} \in \mathbb{Z}^n \\
&= x.
\end{aligned}$$

Donc en posant $t = e^z$, alors

$$x = \bigl(e^{<a_1,z>}, \ldots, e^{<a_n,z>}\bigr) = \bigl(t^{a_1}, \ldots, t^{a_n}\bigr)$$

c'est à dire que

$$x \in X^{\circ}_{\mathcal{A},1}. \qquad \square$$

## 3. Hauteurs canoniques des sous-variétés toriques

Soit $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$. On peut supposer que $\beta_0 = 1$.[1] Rappelons qu'on a supposé que $L_{\mathcal{A}} \simeq \mathbb{Z}^d$, et donc $X_{\mathcal{A},\beta}$ est intègre. On pose $K := \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ et soit $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de $K$. Soient $w_1, \ldots, w_{n-d}$, $n-d$ vecteurs de $\mathbb{Z}^d$ comme dans Lemme 2.4.

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-d\}$, on note par $Q_i$ (resp. $R_i$) le polynôme dans $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (resp. $K[T_0, \ldots, T_n]$) suivant

$$Q_i := \beta^{-w_{+i}} x^{w_{+i}} - \beta^{-w_{-i}} x^{w_{-i}}, \quad R_i(T_0, T_1, \ldots, T_n) := \beta^{-w_{+i}} T^{u_{+i}} - \beta^{-w_{-i}} T^{u_{-i}}$$

$$\text{avec} \quad u_i := \Big(-\sum_{k=1}^{n} w_{ik}, w_{i1}, \ldots, w_{in}\Big), \tag{16}$$

où $\beta^{w_*} := \prod_{k=1}^{n} \beta_k^{w_{*,k}}$ et $T^{u_*} := \prod_{k=0}^{n} T_k^{u_{*,k}}$.

On note par $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}$ le sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K} = \operatorname{Proj}\big(\mathcal{O}_K\big[T_0, T_1, \ldots, T_n\big]\big)$ défini par l'idéal homogène, $\mathcal{O}_K[T_0, \ldots, T_n] \cap I$ où $I$ est l'idéal de $K[T_0, \ldots, T_n]$ définissant $X_{\mathcal{A},\beta}$.

**Définition 3.1.** Soit $X_{\mathcal{A},\beta}$ une variété torique projective intègre de dimension $d$ dans $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ et $K$ un corps de définition de $X_{\mathcal{A},\beta}$. On dit que $X_{\mathcal{A},\beta}$ satisfait la condition $\mathscr{A}$, si les polynômes homogènes $R_1, \ldots, R_{n-d}$ de $K[T_0, \ldots, T_n]$ définisssent $X_{\mathcal{A},\beta}$ et pour tout $k \geq 2$, la variété définie par $R_k, \ldots, R_{n-d}$ est intègre.

**Remarque 3.2.** La condition $\mathscr{A}$ ne dépend pas de $\beta = (1, \beta_1, \ldots, \beta_n)$. En effet, si l'on considère $\theta$ le automorphisme de $\mathbb{P}^n_K$ défini par l'isomorphisme d'algèbres suivant

$$K[T_0, \ldots, T_n] \to K[T_0, \ldots, T_n], \quad T_i \mapsto \beta_i T_i,$$

alors on vérifie que $\theta(X_{\mathcal{A},\beta}) = X_{\mathcal{A},1}$. En d'autres termes, on peut supposer que $\beta = (1, \ldots, 1)$ dans la définition.

**Exemple 3.3.** Grâce à la notion de matrice mixte et dominante, on peut construire des exemples de variétés toriques $X_{\mathcal{A},\beta}$ vérifiant Définition 3.1 (voir Appendice A pour plus de détails).

[1] On vérifie immédiatement que $X_{\mathcal{A},\beta} = X_{\mathcal{A},\gamma\cdot\beta}$ où $\gamma \cdot \beta := (\gamma \cdot \beta_0, \ldots, \gamma \cdot \beta_n)$ pour tout $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}^*$.

Soient $R_1, \ldots, R_{n-d}$ comme avant. On suppose qu'il existe un corps de nombres $F$ tel que son anneau des entiers est factoriel et que $\beta \in (F^*)^{n+1}$. Sous cette hypothèse, on a le lemme suivant

**Lemme 3.4.** *Pour tout $i = 1, \ldots, n-d$, il existe $\tau_i \in K$ tel que*

$$(R_i) \cap \mathcal{O}_K[T_0, \ldots, T_n] = (\tau_i R_i).$$

**Démonstration.** Soit $i \in \{1, \ldots, n-d\}$. On a $R_i = \beta^{-w_{+i}} T^{u_{+i}} - \beta^{-w_{-i}} T^{u_{-i}} = \beta^{-w_{+i}}(T^{u_{+i}} - \beta^{w_i} T^{u_{-i}})$. Comme $\beta \in (F^*)^{n+1}$ avec $\mathcal{O}_F$ est factoriel, alors il existe $a_i$ et $b_i$ dans $\mathcal{O}_F$ premiers entre eux tels que $\beta^{w_i} = \frac{a_i}{b_i}$. On pose $\tau_i := \beta^{w_{+i}} b_i$. Montrons que

$$(R_i) \cap \mathcal{O}_K[T_0, \ldots, T_n] = (\tau_i R_i).$$

Cela peut se déduire du point (3.) de l'exemple 3.5. □

Ci-dessous, on construit des exemples de corps de nombres $F$ et des éléments $\beta \in (F^*)^n$ qui vérifient le résultat du Lemme 3.4. En d'autres termes, on ne suppose pas nécessairement que l'anneau des entiers de $F$ soit factoriel.

**Exemple 3.5.**

1. Soit $L_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^d$ le sous-module engendré par les vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, que l'on suppose isomorphe à $\mathbb{Z}^d$. On note par $H := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, w_i \rangle = 0, \text{ pour } i = 1, \ldots, n-d\}$.[2] Soit $\beta = (1, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$ avec $\beta_k := e^{v_k} \mu_k$ pour $k = 1, \ldots, n$ avec $v := (v_1, \ldots, v_n) \in H \cap \log((\overline{\mathbb{Q}}^*_{>0})^n)$ et $\mu_i$ est une racine de l'unité pour $i = 1, \ldots, n-d$. On a $\beta^{w_k} = e^{\langle v, w_k \rangle} \prod_{i=1}^n \mu_i^{w_{ki}} = \prod_{i=1}^n \mu_i^{w_{ki}}$, qui est une racine de l'unité et donc un élément de $\mathcal{O}_K$. Donc, si l'on pose $\tau_k := \beta^{w_{+k}}$ pour tout $k = 1, \ldots, n-d$, alors $\tau_k R_k = T^{w_{+k}} - \beta^{w_k} T^{u_{-k}} \in \mathcal{O}_K[T_0, \ldots, T_n]$ et on vérifie que
$$(R_k) \cap \mathcal{O}_K[T_0, \ldots, T_n] = (\tau_k R_k) \quad \forall k = 1, \ldots, n-d,$$
avec $K = \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.
2. Si $\beta = (1, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$ avec $\beta^{-w_{+i}}, \beta^{-w_{-i}} \in \mathbb{Q}$ pour tout $i = 1, \ldots, n-d$. Alors $\beta$ vérifie le résultat du Lemme 3.4. En effet, cela résulte du lemme suivant

   **Lemme 3.6.** *Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec $\gcd(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $\gcd(a, b) = 1$, alors l'idéal $(bx^v + a)$ est premier dans $\mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$.*

[2] Ici $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

**Démonstration.** Si $P \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$ on appelle le contenu de $P$ et on le note par $c(P)$, l'élément de $\mathbb{Z}$ défini comme étant le plus grand commun diviseur des coefficients de $P$. On vérifie que $c(aP_1) = ac(P_1)$ et $c(P_1P_2) = c(P_1)c(P_2)$ pour tous $a \in \mathbb{Z}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$.

Montrons que $(bx^v + a)$ est premier dans $\mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$. Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$ tels que $PQ \in (bx^u + a)$. Notons que $(bx^v + a)$ est premier $\mathbb{Q}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$, cela résulte du Lemme 2.3.[3] Donc, on peut supposer qu'il existe $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $R \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$ tels que $qP = (bx^v + a)R$. Par suite, $qc(P) = c(R)$ (puisque $\gcd(a, b) = 1$). Par conséquent $\frac{R}{q} \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$ et donc $P \in (bx^v + a)$. $\square$

3. L'exemple suivant généralise les deux exemples précédents : Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec $\gcd(v_1, \dots, v_n) = 1$. Soit $F$ un corps de nombres et soit $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers. Soient $a, b \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$ avec $(a) + (b) = \mathcal{O}_F$.[4] Montrons que l'idéal $(bx^v + a)$ est premier dans $\mathcal{O}_F[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$. Soient $P, Q \in \mathcal{O}_F[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$ tels que $PQ \in (bx^v + a)$. Notons que $(bx^v + a)$ est premier $F[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$, cela résulte de 2.3. Donc, on peut supposer qu'il existe $r \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$ et $R \in \mathcal{O}_F[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$ tels que $rP = (bx^v + a)R$. Si $S \in \mathcal{O}_F[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$ alors on note par $\widetilde{c}(S)$ l'idéal dans $\mathcal{O}_F$ engendré par les coefficients de $S$. Par suite, $rP = (bx^v + a)R$ implique que $rc(P) = c(R)$ (puisque $(a) + (b) = \mathcal{O}_F$). Par conséquent $\frac{R}{r} \in \mathcal{O}_F[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$ et donc $P \in (bx^v + a)$.

   Pour tout $j = 1, \dots, n-d$, soient $a_j$ et $b_j$ deux éléments de $\mathcal{O}_F$ avec $(a_j) + (b_j) = \mathcal{O}_F$. Il existe $\beta = (1, \beta_1, \dots, \beta_n) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$ avec tel que $\beta^{w_j} = \frac{a_j}{b_j}$ pour tout $j = 1, \dots, n-d$. L'existence de $\beta$ résulte du fait que l'application suivante

$$(\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n, \quad \gamma \mapsto (\gamma^{w_i})_{1 \le i \le n},$$

   est un isomorphisme (rappelons que $\{w_1, \dots, w_n\}$ est une base de $\mathbb{Z}^n$). Donc, si l'on pose $\tau_i := b_i \beta^{w_{+i}}$ alors $(\tau_i R_i) = (b_i T^{u_{+i}} - a_i T^{u_{-i}})$ qui est premier, et on vérifie que

$$(R_i) \cap \mathcal{O}_K[T_0, \dots, T_n] = (\tau_i R_i) \quad \forall i = 1, \dots, n-d.$$

**Remarque 3.7.** Soit $\beta \in (F^*)^{n+1}$ avec $F$ un corps de nombres tel que son anneau des entiers soit factoriel, alors on vérifie que pour tout choix de $\mathcal{A}$ et en gardant les notations du (16), il existe $\tau_i \in K$ pour tout $i = 1, \dots, n-d$ tels que

$$(R_i) \cap \mathcal{O}_K[T_0, \dots, T_n] = (\tau_i R_i) \quad i = 1, \dots, n-d.$$

La preuve de ce fait est une simple adapation de celle du Lemme 3.4.

[3] On peut vérifier que le lemme 2.3 est valable si l'on considère $\overline{\mathbb{Q}}$ à la place de $\mathbb{Z}$.

[4] Par exemple, si $a \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$ alors tout $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ avec $\gcd(b, N_F(a)) = 1$ (où $N_F(a)$ est la norme de $a$ dans $F$) on a $(a) + (b) = \mathcal{O}_F$.

Dans la suite, on aura besoin du lemme d'algèbre suivant

**Lemme 3.8.** *Soit $A$ un anneau commutatif unitaire intègre, et $F$ son anneau de fractions. On note par $A[T_0,\dots,T_n]$ (resp. $F[T_0,\dots,T_n]$) l'anneau des polynômes à $n+1$ variables à coefficients dans $A$ (resp. $F$). Soit $l \in \{1,\dots,n\}$. Soient $R_1,\dots,R_l$, $l$ polynômes homogènes dans $F[T_0,\dots,T_n]$ tels que*

1. *La suite d'idéaux suivante $\big((R_k,R_{k+1},\dots,R_l)\big)_{k=1,\dots,l}$ définit une suite de sous-variétés de $\mathbb{P}^n_F$, strictement décroissante pour l'inclusion.*
2. *$(R_k)$ est premier dans $F[T_0,\dots,T_n]$ pour tout $k=1,\dots,l$.*
3. *Il existe $\sigma_1,\dots,\sigma_l \in F$ tels que $(R_k)\cap A[T_0,\dots,T_n]=(\sigma_k R_k)$ pour tout $k=1,\dots,l$.*

*Alors, $(R_k,R_{k+1},\dots,R_l)\cap A[T_0,\dots,T_n]=(\sigma_k R_k,\dots,\sigma_l R_l)$ et $(\sigma_k R_k,\dots,\sigma_l R_l)$ est premier dans $A[T_0,\dots,T_n]$ pour tout $k=1,\dots,n$.*

**Démonstration.** Posons $J_k := (\sigma_k R_k,\dots,\sigma_l R_l)$ pour tout $k=1,\dots,l$. Montrons ce résultat par récurrence sur $k$. Si $k=l$, alors le résultat est vrai par hypothèse. Supposons que le lemme est vrai pour un certain $k+1$. Le morphisme suivant

$$(\sigma_k R_k) \to \frac{J_k}{J_{k+1}},$$

qui envoie un élément de $(\sigma_k R_k)$ vers sa classe dans $\frac{J_k}{J_{k+1}}$ est clairement surjectif. Soit $Q \in A[T_0,\dots,T_n]$ tel que $Q\cdot\sigma_k R_k \in J_{k+1}$. Comme $J_{k+1}$ est premier (par hypothèse de récurrence) alors on a nécessairement $Q \in J_{k+1}$, car sinon $\sigma_k R_k \in J_{k+1} = (\sigma_{k+1}R_{k+1},\dots,\sigma_l R_l)$ et par conséquent $(R_k,R_{k+1},\dots,R_l)=(R_{k+1},R_{k+2},\dots,R_l)$ dans $F[T_0,\dots,T_n]$, ce qui contredit l'hypothèse (1.). Donc,

$$\frac{(\sigma_k R_k)}{J_{k+1}} \simeq \frac{J_k}{J_{k+1}}.$$

Par (2.) et (3.), on déduit que $\frac{J_k}{J_{k+1}}$ est premier. Puisque $\frac{A[T_0,\dots,T_n]}{J_k} \simeq \frac{A[T_0,\dots,T_n]}{J_{k+1}} / \frac{J_k}{J_{k+1}}$. Alors $J_k$ est premier dans $A[T_0,\dots,T_n]$.

On a clairement $(\sigma_k R_k,\dots,\sigma_l R_l) \subset (R_k,R_{k+1},\dots,R_l)\cap A[T_0,\dots,T_n]$ pour tout $k=1,\dots,l$. Si $f \in (R_k,R_{k+1},\dots,R_l)\cap A[T_0,\dots,T_n]$, alors il existe $L_1,\dots,L_l \in F[T_0,\dots,T_n]$ tels que $f=\sum_{i=k}^l L_i R_i = \sum_{i=k}^l \sigma_i^{-1}L_i(\sigma_i R_i)$. On peut trouver $\alpha \in A$ tel que $\alpha\sigma_i^{-1}L_i \in A[T_0,\dots,T_n]$ pour $i=k,\dots,l$. Par suite, $\alpha f \in J_k$. Comme cet idéal est premier, alors on a nécessairement $f \in J_k$. Ce qui termine la preuve du lemme. □

On suppose dans la suite que $X_{\mathcal{A},\beta}$ satisfait la condition $\mathscr{A}$ (voir Définition 3.1) et que $\beta \in (F^*)^{n+1}$ avec $F$ est un corps de nombres dont l'anneau des entiers est factoriel. Rappelons que $\mathbb{Z}w_1+\ldots+\mathbb{Z}w_{n-d}$ est un sous-module libre et saturé de $\mathbb{Z}^n$ qu'on a completé en une base $\{w_1,\dots,w_{n-d},w_{n-d+1},\dots,w_n\}$ de $\mathbb{Z}^n$. On pose $A_1 := A$ et note par $b_1, \ldots, b_d$ les lignes de ${}^tA_1$. Pour tout $k = 1, 2, \ldots, n-d-1$, soit $\varphi_k$ l'homorphisme de $\mathbb{Z}$-modules suivant

$$\varphi_k : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^{n-d-k} \quad x \mapsto (< x, w_j >)_{1\leq j\leq n-d-k} \quad \forall 1 \leq k \leq n-d-1.$$

En notant que $\ker(\varphi_k)$ est saturé. Par le théorème de la base adaptée, on peut trouver $b_{d+1}, b_{d+2}, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\ker(\varphi_k) = \mathbb{Z}b_{k+d} + \cdots + \mathbb{Z}b_d + \ldots + \mathbb{Z}b_1$, pour $k = 1, \ldots, n-d-1$.[5] Si l'on note par $A_k$ la matrice de taille $(k+d) \times n$ dont la matrice transposée ${}^tA_k$ est formée par les lignes $b_1, \ldots, b_{k+d}$ pour $k = 1, \ldots, n-d-1$. Alors,

$$\ker({}^tA_k) = \mathbb{Z}w_1 + \cdots + \mathbb{Z}w_{n-k} \quad \forall k = 1, \ldots, n-d-1.$$

Par suite, $X_{A_k,\beta}$ est la variété définie par l'idéal $J_k := (R_k, \ldots, R_{n-d})$ et $X_{\mathcal{A}_k,\beta}$ est une hypersurface dans $X_{\mathcal{A}_{k+1},\beta}$ donnée par $R_k$ pour tout $k = 1, \ldots, n-d-1$, et $X_{\mathcal{A}_{n-d},\beta}$ donnée par $R_{n-d}$ dans $\mathbb{P}^n_K$ par la condition $\mathscr{A}$.

Pour tout $k = 1, \ldots, n-d$, on note par $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_k,\beta}$ la clôture de Zariski de $X_{\mathcal{A}_k,\beta}$. Autrement dit, $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_k,\beta}$ est le schéma projectif défini par l'idéal premier homogène

$$J_k \cap \mathcal{O}_k[T_0, \ldots, T_n].$$

Comme on a supposé que $X_{\mathcal{A},\beta}$ vérifie l'hypothèse $\mathscr{A}$ et que $\beta \in (F^*)^{n+1}$ avec $F$ un corps de nombres dont l'anneau des entiers soit factoriel, alors $R_1, \ldots, R_{n-d}$ vérifie les conditions du lemme 3.8.[6] Par suite $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_k,\beta}$ est le modèle intègre pour $X_{\mathcal{A}_k,\beta}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ défini par

$$(\tau_k R_k, \ldots, \tau_{n-d} R_{n-d}),$$

et que pour tout $k = 1, \ldots, n-d-1$, $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_k,\beta}$ est une hypersurface dans $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{k+1},\beta}$ donnée par le polynôme $s_k := \tau_k R_k \in \mathcal{O}_K\big[T_0, \ldots, T_n\big]$ et $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{n-d},\beta}$ est l'hypersurface dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}$ définie par $s_{n-d} := \tau_{n-d} R_{n-d}$. On a alors la suite suivante de schémas projectives intègres sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}_1,\beta} := \mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta} \subsetneq \mathcal{X}_{\mathcal{A}_2,\beta} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{X}_{\mathcal{A}_{n-d},\beta} \subsetneq \mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}. \tag{17}$$

Par la formule due à Faltings (voir [2, (3.2.1), p. 949] pour les métriques $\mathcal{C}^\infty$ et [18] pour les métriques non $\mathcal{C}^\infty$) on a pour tout $j = 1, \ldots, n-d-1$

[5] Les vecteurs $b_{d+1}, \ldots, b_n$ peuvent être obtenus par récurrence, en utilisant la réduction de Smith.

[6] Les conditions 1. et 3. du lemme 3.8 sont automatiques dans ce cas. Comme l'application évidente $(R_i) \to (R_i, \ldots, R_{n-d})/(R_{i+1}, \ldots, R_{n-d})$ est surjective et que $(R_i, \ldots, R_{n-d})$ est premier car $X_{\mathcal{A}_i,\beta}$ est intègre par hypothèse, alors on déduit la condition 2.

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_j,\beta}) &= \deg(R_j) h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{j+1},\beta}) \\ &\quad + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \int_{\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{j+1},\beta}(\mathbb{C})} \log\|s_j\|_{\sigma,\infty} c_1\big(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty\big)^{j+d}, \\ h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{n-d},\beta}) &= \deg(R_{n-d}) h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}) \\ &\quad + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \int_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} \log\|s_j\|_{\sigma,\infty} c_1\big(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty\big)^{n} \end{aligned} \tag{18}$$

Comme la hauteur canonique de $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}$ est nulle (voir [18, Proposition 7.1]), alors le calcul de la hauteur canonique de $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}$ résultera de (18), si l'on trouve une formule explicite pour $c_1\big(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty\big)^{j+d}$ apparaissant dans l'intégrale de la formule (18). Cela fera l'objet du théorème 3.10. On a tout d'abord la proposition suivante :

**Proposition 3.9.** *Pour tout $i = 1, \ldots, n-d-1$, on a*

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_i,\beta}) &= \deg(R_i)\, h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}) + \deg(X_{\mathcal{A}_{i+1},1}) \log|N_K(\tau_i)| \\ &\quad + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \int_{t\in\mathbb{T}^{d+i}(\mathbb{C})} \log \frac{\big|Q_i\big(*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}(t)\big)\big|_\sigma}{\max(|*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta} t|_\sigma)^{\deg(R_i)}} \\ &\quad \times \Big(dd^c \log\max\Big(|*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}(t)|_\sigma\Big)\Big)^{d+i}, \end{aligned} \tag{19}$$

*et*

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{n-d},\beta}) &= \log|N_K(\tau_{n-d})| \\ &\quad + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \int_{t\in\mathbb{T}^n(\mathbb{C}_\sigma)} \log \frac{\big|Q_{n-d}(t)\big|_\sigma}{\max(1, |t_1|_\sigma, \ldots, |t_n|_\sigma))^{\deg(R_{n-d})}} \\ &\quad \times \Big(dd^c \log\max\big(1, |t_1|_\sigma, \ldots, |t_n|_\sigma\big)\Big)^n \end{aligned}$$

*où $|*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}(t)|_\sigma := \big(|(*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}(t))_0|_\sigma, \ldots, |(*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}(t))_n|_\sigma\big)$ avec $*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}(t) = (*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}(t)_0, \ldots, *_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}(t)_n)$ (voir (4)).*

**Démonstration.** Par la formule dûe à Faltings (voir [2, (3.2.1), p. 949] et [18, Théorème 5.5.6]),

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_i,\beta}) &= \deg(R_i)\, h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}) + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \int_{\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}(\mathbb{C})} \log\|s_i\|_{\sigma,\infty} c_1\big(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty\big)^{d+i} \\ &= \deg(R_i)\, h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \int_{\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{i+1},1}(\mathbb{C})} \log\|s_i(\beta\cdot x)\|_{\sigma,\infty} \Big(dd^c \log\max(|\beta\cdot x|_\sigma)\Big)^{d+i} \\
&= \deg(R_i)\, h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}) + \deg(X_{\mathcal{A}_{i+1},1}) \log|N_K(\tau_i)| \\
&+ \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \int_{\mathbb{T}^{d+i}(\mathbb{C})} \log \frac{|Q_i(*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}t)|_\sigma}{\max\big(|*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}t|_\sigma\big)^{\deg(R_i)}} \Big(dd^c \log\max(|*_{\mathcal{A}_{i+1},\beta}t|_\sigma)\Big)^{d+i} \text{ par 4.4.}
\end{aligned}
$$

La deuxième égalité se déduit de la même manière. □

Soit $\mathcal{A}' := \{a'_1, \dots, a'_n\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{Z}^{d+1}$ telle que $L_{\mathcal{A}'} = \mathbb{Z}^{d+1}$ avec $d+1 \leq n$ et $\beta = (1, \beta_1, \dots, \beta_n) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$. Le but de la suite consiste à étudier le courant suivant défini sur $\mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$

$$
\Big(dd^c \log\max(|\beta\cdot t^{a'}|)\Big)^{d+1},
$$

où $|\beta\cdot t^{a'}| := (1, |\beta_1 t^{a'_1}|, \dots, |\beta_n t^{a'_n}|)$ pour tout $t \in \mathbb{T}^{d+1}$. Rappelons que ce courant apparaît dans la formule donnant la hauteur de $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}$ (voir 3.9).

**Notations 1.**

1. On note par Log l'application moment donnée comme suit

$$
\begin{aligned}
\{x_0 \neq 0\} = (\mathbb{C}^*)^{d+1} &\xrightarrow{\text{Log}} \mathbb{R}^{d+1} \\
(z_1, \dots, z_{d+1}) &\longrightarrow (\log|z_1|, \dots, \log|z_{d+1}|).
\end{aligned} \tag{20}
$$

2. Soit $f_k$ la fonction sur $\mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$ définie par $f_k(t) := \beta_k t^{a'_k}$, $\forall t \in \mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
3. Dans $\mathbb{R}^{d+1}$, on pose

$$
H_{i,j} := \Big\{u \in \mathbb{R}^{d+1} \ \big|\ \langle a'_i - a'_j, u\rangle = \log\frac{|\beta_j|}{|\beta_i|}\Big\} \quad \forall\, 1 \leq i,j \leq n. \tag{21}
$$

On note par $\mathscr{H}$ l'ensemble de sous-espaces affines de $\mathbb{R}^{d+1}$ défini comme suit : $H \in \mathscr{H}$, s'il existe $I$ un sous-ensemble non-vide de $\{(i,j)\ \big|\ 1 \leq i,j \leq d\}$ tel que $H = \bigcap_{(i,j)\in I} H_{i,j}$.
4. Soit $S$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{d+1}$ défini comme suit : $s \in S$ si et seulement s'il existe un sous ensemble $I_s$ de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ tel que

$$
\{s\} = \bigcap_{\tau\in I_s} H_\tau. \tag{22}
$$

5. On pose

$$\mathcal{A}'_{I_s} := \{a'_i \in \mathcal{A}' \mid \exists\, a'_j,\ (i,j) \in I_s\},\tag{23}$$

et on considère $X_{\mathcal{A}'_{I_s},1}$ la variété torique associée, au sens de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky.

6. Soit $s = (s_1, s_2, \dots, s_{d+1}) \in S$, on considère

$$\mathbf{S}_s := \mathrm{Log}^{-1}(s) = \{z \in \mathbb{C}^{d+1} \mid |z_1| = |e^{s_1}|, \dots, |z_{d+1}| = |e^{s_{d+1}}|\},\tag{24}$$

et $\delta_{\mathbf{S}_s}$, le courant intégration sur le polycercle $\mathbf{S}_s$.

D'après la proposition 3.9, afin de calculer $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta})$, il suffit de déterminer

$$\left(dd^c \log\max(|\beta \cdot t^{a'}|)\right)^{d+1}$$

C'est l'objet du théorème ci-dessous.

On considère sur $\mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$ le courant suivant

$$\omega_\beta := dd^c \log\max\big(|\beta \cdot t^{a'}|\big)$$

où $|\beta \cdot t^{a'}|$ est par définition le vecteur $\big(1, |\beta_1 t^{a'_1}|, \dots, |\beta_n t^{a'_n}|\big)$ pour tout $t \in \mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$. Remarquons que

$$\omega_\beta = (*_{\mathcal{A}',\beta})^*\big(c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty)_{|X_{\mathcal{A},\beta}}\big),$$

rappelons que $*_{\mathcal{A}',\beta}$ est le morphisme de $\mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$ vers $\mathbb{P}^n$ introduit au début de l'article en remplaçant $\overline{\mathbb{Q}}$ par $\mathbb{C}$.

**Théorème 3.10.** *Soit $\mathcal{A}'$ comme avant. Sur $\mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$, on a l'égalité de courants suivante :*

$$\omega_\beta^{d+1} = \sum_{s\in S} \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_s},1})\delta_{\mathbf{S}_s}.$$

Comme conséquence, nous disposons d'un moyen de calcul, par récurrence, pour les hauteurs canoniques des sous-variétés toriques $X_{\mathcal{A},\beta}$ satisfaisant l'hypothèse $\mathscr{A}$, avec $\beta \in (F^*)^{n+1}$ où $F$ est un corps de nombres dont l'anneau des entiers soit factoriel. C'est l'objet du théorème ci-dessous.

**Théorème 3.11.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \{1, \dots, n-1\}$. Soit $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_n\}$ une sous-famille de $\mathbb{Z}^d$ de rang $d$ avec $L_\mathcal{A} \simeq \mathbb{Z}^d$. Soit $\beta \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$. On suppose que $X_{\mathcal{A},\beta}$ vérifie l'hypothèse $\mathscr{A}$ et que $\beta \in (F^*)^{n+1}$ où $F$ est un corps de nombres dont l'anneau des entiers soit factoriel. On a,*

– *Si* $d \leq n-1$*. On note* $\mathcal{A}' := \mathcal{A}_2$ *(voir (17)) alors il existe* $\tau \in K$ *tel que*

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) = \deg(R_1)\, h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}',\beta}) + \deg(X_{\mathcal{A}',1}) \log |N_K(\tau)| + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sum_{s_\sigma \in S_\sigma} \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_\sigma}},1}) \int_{t\in\mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})} \log \frac{|Q_1(\beta\cdot t^{a'})|_\sigma}{\max(|\beta\cdot t^{a'}|_\sigma)^{\deg(R_1)}} \delta_{\mathbf{S}_{s_\sigma}}.$$

– *Si* $d = n-1$*, alors il existe aussi* $\tau \in K$ *tel que*

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) = \log |N_K(\tau)| + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \int_{t\in(\mathbb{S}^1)^n} \log |Q_1(t_1,\ldots,t_n)|_\sigma \frac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\ldots t_n}.$$

**Démonstration.** Le théorème résulte des Proposition 3.9 et Théorème 3.10. Les intégrales qui figurent dans les formules du théorème seront explicitées, voir Remarque 3.16. $\square$

Afin de démontrer le théorème 3.10, on commence par établir les lemmes d'algèbre linéaire suivants

**Lemme 3.12.** *Soit* $\mathbb{R}^n$ *l'espace réel de dimension* $n$*. Soit* $H$ *un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^n$ *de codimension* $h$*. S'il existe* $\Omega$ *un ensemble fini d'hyperplans affines tel que*

$$H = \bigcap_{K\in\Omega} K,$$

*alors, on peut extraire un sous ensemble* $\Omega' \subset \Omega$ *de cardinal* $h$ *tel que*

$$H = \bigcap_{K\in\Omega'} K.$$

**Démonstration.** Il existe une matrice $A$ $(h\times n)$ de rang $h$, et $b\in\mathbb{R}^n$, tels que

$$H = \{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax = b\}.$$

Pour simplifier on peut supposer que $H$ et les éléments de $\Omega$ sont des espaces vectoriels à l'aide de l'application suivante :

$$H \longrightarrow \ker A$$
$$x \longrightarrow x - x_0$$

où $x_0$ est un élément de $H$. Démontrons le lemme par récurrence sur $h$ ; le cas $h = 1$ est évident, donc supposons que le résultat est vrai pour $h \geq 1$. S'il existe $K_0 \in \Omega$ tel que

$$\mathrm{codim}\Big(\bigcap_{K\in\Omega-\{K_0\}} K\Big) = h-1,$$

par suite, $\bigcap_{K\in\Omega-\{K_0\}} K$ vérifie l'hypothèse de récurrence, et on conclut en écrivant $H = K_0 \cap (\bigcap_{K\in\Omega-\{K_0\}} K)$.

Si maintenant, on a $\forall\, K_0 \in \Omega$, $\mathrm{codim}(\bigcap_{K\in\Omega-\{K_0\}} K) = h$, donc $H = \bigcap_{K\in\Omega-\{K_0\}} K$, donc soit on est au premier cas, sinon on enlève des éléments de $\Omega$, mais comme la codimension de l'intersection de $h$ espaces vectoriels de codimension 1 est au plus $h$, cela termine la preuve du lemme. $\square$

**Lemme 3.13.** *Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel réel de dimension $n$, muni du produit scalaire standard qu'on notera $<,>$. Soit $q \in \{1,\dots,n-1\}$. On considère $q$ vecteurs $b_1,\dots,b_q$ de $\mathbb{R}^n$ et $q$ réels $c_1,\dots,c_q$ et on pose $H_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid\, < b_i, x >= c_i\}$, $\forall\, i \in \{1,\dots,q\}$. Si*

$$\emptyset \neq \cap_{i=1}^{q-1} H_i \subseteq H_q, \tag{25}$$

*alors $b_q \in \mathrm{Vect}(b_1,\dots,b_{q-1})$, où $\mathrm{Vect}(b_1,\dots,b_{q-1})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $b_1,\dots,b_{q-1}$.*

**Démonstration.** Si $\cap_{i=1}^{q-1} H_i \neq \emptyset$, alors on peut se ramener au cas : $c_1 = \cdots = c_q = 0$ et supposer que $\{b_1,\dots,b_{q-1}\}$ est libre. Posons $F := \mathrm{Vect}(b_1,\dots,b_q)$.

Soit $x \in F \cap (H_1 \cap \cdots \cap H_{q-1})$, donc il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_q \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^q \lambda_i b_i$. Par (25), $< x, b_i >= 0$, $\forall\, 1 \leq i \leq q$, cela donne :

$$0 = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i < b_i, b_j >, \forall\, 1 \leq j \leq q.$$

Si $b_q \notin \mathrm{Vect}(b_1,\dots,b_{q-1})$, alors la matrice suivante :

$$(< b_i, b_j >)_{1\leq i,j\leq q}$$

est inversible, on déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_q = 0$ donc $x = 0$, cela implique que $\dim(F + H_1 \cap \cdots \cap H_{q-1}) = q + n - (q-1) = n+1$, ce qui est impossible. $\square$

**Notations 2.**

1. $\mathbb{N}_n = \{1,\dots,n\}$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$, $\mathbf{J}(z) := \{i \in \mathbb{N}_n \mid |f_i(z)| = \max(|f_1(z)|,\dots,|f_n(z)|)\}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})$, $\mathbf{c}(z) = \mathrm{Card}(\mathbf{J}(z))$.
4. $\mathbf{J}_{d+1} = \{z \in \mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C}) \mid \mathbf{c}(z) \geq d+2\}$.

On note par $\mathbf{L}$ le lieu de non-différentiabilité de $\max(|f_1|,\dots,|f_n|)$ (on suppose que $\forall\, i \neq j$, $|f_i| \neq |f_j|$), c'est à dire :

$$\mathbf{L} = \left\{z \in \mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C}) \mid \exists i \neq j \in \mathbb{N}_n, |f_i(z)| = |f_j(z)| \text{ et } \max(|f_1(z)|,\dots,|f_n(z)|) = |f_i(z)|\right\}.$$

Soit $y \in \mathbf{L}$ et posons $v := \mathrm{Log}(y)$.

L'ensemble des $H \in \mathscr{H}$ contenant $v$ ordonné par l'inclusion admet un plus petit élément. Notons le par $H_v$ et soit $h$ sa codimension dans $\mathbb{R}^{d+1}$. Par le lemme 3.12, il existe $h+1$ hyperplans de la forme $H_{i,j}$ (cf. 3.12) tels que $H_v$ soit leur intersection, cela est équivalent à l'existence d'un sous-ensemble de $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de cardinal $h+1$ qu'on suppose égal à $\{f_1, \ldots, f_{h+1}\}$ telle que :

$$H_v = \mathrm{Log}\big\{|f_1| = \cdots = |f_{h+1}|\big\}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que :

$$\mathbf{J}(y) = \big\{1, \ldots, h+1, h+2, \ldots, \mathbf{c}(y)\big\}.$$

Par continuité, il existe $V_y$ un voisinage ouvert de $y$, tel que $\forall\, z \in V_y$, on a $\mathbf{c}(z) = \mathbf{c}(y)$ et $\mathbf{J}(z) = \{1, \ldots, h+1, h+2, \ldots, \mathbf{c}(y)\}$.

Posons :

$$b_j := a_{j+1} - a_1,\ j \geq 1.$$

S'il existe $i_0 \notin \{1, \ldots, h+1\}$, tel que $|f_{i_0}(y)| = M(y)$ (ce qui est équivalent à $\mathbf{c}(y) > h+1$), alors $v \in H_{1i_0}$ et donc par définition de $H_v$, on a :

$$H_v \subset H_{1i_0}.$$

Mais par le lemme 3.13

$$b_{i_0} \in \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_h). \tag{26}$$

Par définition de $H_v$, $\{b_1, \ldots, b_h\}$ est libre. On choisit $b'_{h+1}, \ldots, b'_{d+1}$ $d+1-h$ vecteurs de $\mathbb{Z}^{d+1}$ tels que la famille $\{b_1, \ldots, b_h, b'_{h+1}, \ldots, b'_{d+1}\}$ soit libre et on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathbb{C}^{d+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{d+1} \\ t = (t_1, \ldots, t_{d+1}) & \longmapsto & (\frac{\beta_2}{\beta_1} t^{b_1}, \ldots, \frac{\beta_{h+1}}{\beta_1} t^{b_h}, t^{b'_{h+1}}, \ldots, t^{b'_{d+1}}). \end{array}$$

Puisque $\{b_1, \ldots, b_h, b'_{h+1}, \ldots, b'_{d+1}\}$ est libre alors $\Phi$ est un isomorphisme.

On introduit donc le changement de variables suivant :

$$x_i = \frac{\beta_i}{\beta_1} t^{b_i} (= \frac{\beta_i t^{a_i}}{\beta_1 t^{a_1}}),\ 1 \leq i \leq h \quad \text{et} \quad x_i = t^{b'_i},\ h+1 \leq i \leq d+1.$$

Rappelons que sur $V_y$

$$\begin{aligned} M(t) &= \max(|f_1(t)|, \ldots, |f_{h+1}(t)|, |f_{h+2}(t)|, \ldots, |f_{\mathbf{c}(y)}(t)) \\ &= \max(|\beta_1 t^{a_1}|, \ldots, |\beta_{\mathbf{c}(y)} t^{a_{\mathbf{c}(y)}}|). \end{aligned}$$

Sur l'ouvert $\Phi(V_y)$, on pose :

$$\omega'^{d+1}_{\beta} := (dd^c M(\Phi^{-1}))^{d+1}.$$

Par (26), il existe des $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$ avec $h+1 \leq i \leq \mathbf{c}(y)$ et $h+1 \leq i \leq \mathbf{c}(y)$, $1 \leq j \leq h$

$$b_i = \sum_{j=1}^{h} \lambda_{ij} b_j, \quad h+1 \leq i \leq \mathbf{c}(y)$$

et $\theta_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ tels qu'on a sur $\Phi(V_y)$ :

$$\omega'^{d+1}_{\beta} = (dd^c \log\max(1, |x_1|, \ldots, |x_h|, |\theta_{h+1} \prod_{j=1}^{h} x_j^{\lambda_{(h+1)j}}|, \ldots, |\theta_{\mathbf{c}(y)} \prod_{j=1}^{h} x_j^{\lambda_{\mathbf{c}(y)j}}|))^{d+1}$$

Montrons que $\omega^{d+1}_{\beta}$ est nul sur $V_y$ si $h \leq d$ : Pour tout $p \geq 2$ soit $T_p$ le courant positif défini par la forme différentielle suivante :

$$\omega'^{d+1}_{\beta,p} = \Big(dd^c \log\big(1 + |x_1|^p + \cdots + |x_h|^p + |\theta_{h+1} \prod_{j=1}^{h} x_j^{\lambda_{(h+1)j}}|^p + \cdots + |\theta_{\mathbf{c}(y)} \prod_{j=1}^{h} x_j^{\lambda_{\mathbf{c}(y)j}}|^p\big)^{\frac{1}{p}}\Big)^{d+1}$$

Par la théorie de Bedford et Taylor (voir [1]), la suite $(T_p)_{p\geq 2}$ converge faiblement vers $\omega^{d+1}_{\beta}$. Remarquons que $\omega'^{d+1}_{\beta,p}$ est une forme de degré $(d+1, d+1)$ qui est fonction de $x_1, \ldots, x_h$ mais comme $h \leq d$ alors cette forme est nulle. On conclut que $\omega'^{d+1}_{\beta}$ est le courant nul.

Le cas qui reste est $h = d+1$, ce dernier corresponds à $H_v = \{v\}$, donc $v \in S$.

Comme $S$ est fini, alors $\forall\, s \in S$, $\exists V_s$ un voisinage ouvert de $\mathbf{S}_s$ tel que $V_s \cap \mathbf{S}_{s'} = \emptyset$, $\forall\, s' \neq s$. On a donc montré que

$$\mathrm{Supp}(\omega^{d+1}_{\beta}) \subseteq \mathrm{Log}^{-1}(S).$$

Plus précisément, on a

$$\mathrm{Supp}((\omega^{d+1}_{\beta})_{|V_s}) \subseteq \mathrm{Log}^{-1}(s) = \mathbf{S}_s,\ \forall\, s \in S$$

Fixant un $s \in S$, il existe $\Omega_s$ sous ensemble de $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de cardinal $d+1$ qui représente $\omega^{d+1}_{\beta}$ au voisinage de $\mathbf{S}_s$ : $\omega^{d+1}_{\beta} = (dd^c \log\max_{f\in\Omega_s} |f|)^{d+1}$, au voisinage de $\mathbf{S}_s$. On note par $\omega^{d+1}_{\beta,s}$ son extension à $\mathbb{T}^{d+1}$ et par $X_{\mathcal{A}'_s,1}$ la sous-variété torique de $\mathbb{P}^n$ définie par $\Omega_s$. La raisonnement précédent permet de conclure que cette variété est de dimension $d+1$ et que

$$\int_{\mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})} \omega_{\beta,s}^{d+1} \neq 0. \tag{27}$$

Montrons qu'au voisinage de $\mathbf{S}_s$, il existe une constante $C_s$ tel que

$$\omega_{\beta,s}^{d+1} = C_s \cdot \delta_{\mathbf{S}_s}.$$

Commençons par montrer que $\mathrm{Supp}(\omega_{\beta,s}^{d+1}) = \mathbf{S}_s$. Si $\mathbf{S}_s \backslash \mathrm{Supp}((\omega_{\beta,s}^{d+1})_{|V_s}) \neq \emptyset$, c'est un ouvert de $\mathbf{S}_s$ ; Soit $D$ un ouvert connexe de $\mathbf{S}_s \backslash \mathrm{Supp}((\omega_{\beta}^{d+1})_{|V_s})$, on a

$$\int_{\mathbf{S}_s} \chi_D \omega_{\beta,s}^{d+1} = 0. \tag{28}$$

$\chi_D$ la fonction caractéristique de $D$.

Remarquons que $\omega_{\beta,s}^{d+1}$ est invariant par rotation, en effet si $\theta$ est une rotation de $(\mathbb{S}^1)^{d+1} \subset \mathbb{T}^{d+1}$ ($\theta$ est un produit de rotation sur chaque facteur $\mathbb{S}^1$), alors on a pour tout $\rho$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{T}^{d+1}$ :

$$\begin{aligned}
\theta_*[\omega_{\beta,s}^{d+1}](\rho) &= \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \theta^*(\rho)(x)\omega_{\beta,s}^{d+1}(x) \\
&= \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \rho(x)((\theta^{-1})^*\omega_{\beta,s}(x))^{d+1} \\
&= \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \rho(x)\omega_{\beta,s}^{d+1}(x) \\
&= [\omega_{\beta,s}^{d+1}](\rho),
\end{aligned}$$

donc le courant $\omega_{\beta,s}^{d+1}$ est invariant par rotation, alors (28) implique que $\int_{\mathbf{S}_s} \omega_{\beta,s}^{d+1} = 0$, ce qui est contredit (27), on déduit que

$$\mathrm{Supp}(\omega_{\beta}^{d+1}) = \mathbf{S}_s,$$

au voisinage de $\mathbf{S}_s$.

**Lemme 3.14.** *Il existe* $C_s = \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_s},1})$, *non nul, tel que*

$$\omega_{\beta,s}^{d+1} = C_s \cdot \delta_{\mathbf{S}_s}.$$

Par une dilatation du polycercle $\mathbf{S}_s$ en $(\mathbb{S}^1)^{d+1}$, il suffit de démontrer le lemme ci-dessous :

**Lemme 3.15.** *Soit $\mu$ une mesure positive sur $(\mathbb{S}^1)^p$ invariante par l'action de $(\mathbb{S}^1)^p$, alors il existe $c$ un réel tel que*

$$\mu = c \cdot \delta_{(\mathbb{S}^1)^p}.$$

**Démonstration.** C'est une conséquence de la théorie des mesures de Haar sur les groupes de Lie compacts.

Remarquons que $C_s = \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_s},1}))$. $\square$

On a donc terminer la preuve du théorème 3.10.

**Remarque 3.16.** Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_2$ comme dans (17). On note $\mathcal{A}' := \mathcal{A}_2$. Soit $\sigma : K \to \mathbb{C}$ une place à l'infini de $K$ et notons par $S_\sigma$ l'ensemble associée à $X_{\mathcal{A}',\beta}$ (comme dans Théorème 3.10) pour la norme $|\cdot|_\sigma$.

Soit $s_\sigma \in S_\sigma$. Par définition de l'ensemble $S_\sigma$ et par Lemme 3.12, il existe $\{i_1 \leq \ldots \leq i_{d+1}\}$ et $\{j_1 \leq \ldots \leq j_{d+1}\}$ deux sous-ensembles de $\{0, 1, \ldots, n\}$ tel que $\{s\} = \{u \in \mathbb{R}^{d+1} | \log|\beta_{i_1}|_\sigma + < a'_{i_1}, u >= \log|\beta_{j_1}|_\sigma + < a'_{j_1}, u >= \cdots = \log|\beta_{i_{d+1}}|_\sigma + < a'_{i_{d+1}}, u >= \log|\beta_{i_{d+1}}|_\sigma + < a'_{j_{d+1}}, u >\}$.[7] Par un simple argument d'algèbre linéaire, il existe $d+1$ vecteurs de $\mathbb{Q}^{n+1}$ $v_{s,1}, \ldots, v_{s,d+1}$, qui s'écrivent en fonction des $a_{i_*}$ et $a_{j_*}$, tels que

$$s_\sigma = (\log|\beta^{v_{s,1}}|_\sigma, \ldots, \log|\beta^{v_{s,d+1}}|_\sigma). \tag{29}$$

On note par $i(s)$ l'entier $i_1$. On a clairement $\max(|\beta \cdot t^{a'}|_\sigma) = |\beta_{i(s)} e^{<s, a'_{i(s)}>}|_\sigma$ pour tout $t \in \mathbf{S}_s$.

Explicitons l'intégrale de la formule du 3.11 lorsque $d \leq n-2$. On a

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t \in \mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})} \log\left|Q_1(\beta \cdot t^{a'})\right|_\sigma \delta_{\mathbf{S}_{s_\sigma}} \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{t \in \mathbf{S}_{s_\sigma}} \log\left|(t^{a'})^{w_{+,1}} - (t^{a'})^{w_{-,1}}\right|_\sigma \frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{d+1}}{t_1 \cdots t_{d+1}} \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{t \in \mathbf{S}_{s_\sigma}} \log\left|(t^{a'})^{w_{-,1}}\right|_\sigma \frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{d+1}}{t_1 \cdots t_{d+1}} \\
&\qquad + \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{t \in \mathbf{S}_s} \log\left|(t^{a'})^{w_1} - 1\right|_\sigma \frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{d+1}}{t_1 \cdots t_{d+1}} \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} < s_\sigma, a'_i > w_{-,1,i} + \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{t \in (\mathbb{S}^1)^{d+1}} \log\left|((e^{s_\sigma} \cdot t)^{a'})^{w_1} - 1\right|_\sigma \frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{d+1}}{t_1 \cdots t_{d+1}}
\end{aligned}$$

[7] Les indices $\{i_1 \leq \ldots \leq i_{d+1}\}$ et $\{j_1 \leq \ldots \leq j_{d+1}\}$ correspondent à une sous matrice de $(a'_i - a'_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ de rang maximal, c-à-d $d+1$.

$$= \sum_{i=1}^{n} < s_\sigma, a'_i > w_{-,1,i} + \sum_{i=1}^{n} < s_\sigma, a'_i > w_{1,i} + \log^+ \left| e^{-\sum_{i=1}^{n} < s_\sigma, a'_i > w_{1,i}} \right|_\sigma$$
$$= \sum_{i=1}^{n} < s_\sigma, a'_i > w_{-,1,i} + \log^+ \left| e^{\sum_{i=1}^{n} < s_\sigma, a'_i > w_{1,i}} \right|_\sigma .$$

Notons qu'on a utilisé la formule de Jensen, avec $\log^+ |\alpha| := \max(0, \log |\alpha|)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Par suite,

$$\int\limits_{t \in \mathbb{T}^{d+1}(\mathbb{C})} \log \frac{|Q_1(\beta \cdot t^{a'})|_\sigma}{\max(|\beta \cdot t^{a'}|)^{\deg(R_1)}} \delta_{\mathbf{S}_{s_\sigma}} = \sum_{i=1}^{n} < s_\sigma, a'_i > w_{-,1,i} + \log^+ \left| e^{\sum_{i=1}^{n} < s_\sigma, a'_i > w_{1,i}} \right|_\sigma$$
$$- \deg(R_1) \log |\beta_{i(s)}| - \deg(R_1) < s_\sigma, a'_{i(s)} > . \tag{30}$$

Notons, en particulier qu' il existe d'après (29), un vecteur $v_{s_\sigma} \in \mathbb{Q}^n$ tel que le dernier terme s'écrit $\log |\beta^{v_{s_\sigma}} \beta_0^{-\sum_{j=1}^{n} v_{s_\sigma, j}}|_\sigma$.

On a donc,

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty} (\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) &= \deg(Q_1)\, h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty} (\mathcal{X}_{\mathcal{A}',\beta}) + \deg(X_{\mathcal{A}',1}) \log |N_K(\tau)| \\ &+ \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \sum_{s_\sigma \in S_\sigma} \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_\sigma}},1}) \sum_{i=1}^{n} < s_\sigma, a'_i > w_{-,1,i} \\ &+ \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \sum_{s_\sigma \in S_\sigma} \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_\sigma}},1}) \sum_{i=1}^{n} \log^+ \left| e^{\sum_{i=1}^{n} < s_\sigma, a'_i > w_{1,i}} \right|_\sigma \\ &- \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \sum_{s_\sigma \in S_\sigma} \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_\sigma}},1}) \deg(R_1) \log |\beta_{i(s_\sigma)}|_\sigma \\ &- \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \sum_{s_\sigma \in S_\sigma} \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_\sigma}},1}) \deg(R_1) < s_\sigma, a'_{i(s_\sigma)} >, \end{aligned}$$

avec $\deg(X_{\mathcal{A}',1}) = (d+1)!\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathrm{Conv}(a'_1, \ldots, a'_{d+1})$ et $\deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_\sigma}},1}) = (d+1)! \times \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathrm{Conv}(a_i | \exists j, (i,j) \in I_{s_\sigma})$ pour tout $s_\sigma \in S_\sigma$ et $\sigma : K \to \mathbb{C}$.

Si l'on note par $a_1^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)}$ les éléments de $\mathcal{A}_j$ pour $j = 1, \ldots, n-d-1$ et $d \leq n-2$. Alors comme avant on a la formule suivante

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty} (\mathcal{X}_{\mathcal{A}_j,\beta}) - \deg(R_j)\, h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty} (\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{j+1},\beta}) &= \deg(X_{\mathcal{A}_{j+1},1}) \log |N_K(\tau_j)| \\ &+ \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \sum_{s_\sigma \in S_{j,\sigma}} \deg(X_{\mathcal{A}'_{j+1, I_{s_\sigma}},1}) \sum_{i=1}^{n} (s_\sigma \cdot a_i^{(j)}) w_{-,j,i} \\ &+ \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \sum_{s_\sigma \in S_{j,\sigma}} \deg(X_{\mathcal{A}'_{j+1, I_{s_\sigma}},1}) \sum_{i=1}^{n} \log^+ \left| e^{\sum_{i=1}^{n} (s_\sigma \cdot a_i^{(j)}) w_{j,i}} \right|_\sigma \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sum_{s_\sigma\in S_{j,\sigma}} \deg(X_{\mathcal{A}'_{j+1,I_{s_\sigma}},1}) \deg(R_j) \log|\beta_{i(s)}|_\sigma \\
&- \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sum_{s_\sigma\in S_{j,\sigma}} \deg(X_{\mathcal{A}'_{j+1,I_{s_\sigma}},1}) \deg(R_j) < s_\sigma, a^{(j)}_{i(s_\sigma)} >, \qquad (31)
\end{aligned}
$$

avec $\deg(X_{\mathcal{A}_{j+1},1}) = (d+j+1)!\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{d++j+1}}\mathrm{Conv}(a_1^{(j+1)},\ldots,a_{d+1}^{(j+1)})$ et pour tout $s_\sigma \in S_{j+1,\sigma}$, $\deg(X_{\mathcal{A}'_{j+1,I_{s_\sigma}},1}) = (d+j+1)!\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{d+j+1}}\mathrm{Conv}(a_i^{(j+1)}|\exists k,(i,k)\in I_{s_\sigma})$ pour tout $\sigma : K \to \mathbb{C}$.

Si $d = n-1$, alors d'après ce qui précède ou par [18, Proposition 7.2.1], on a

$$
\begin{aligned}
h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{n-d},\beta}) &= \log|N_K(\tau_1)| + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \int_{t\in(\mathbb{S}^1)^n} \log|Q_{n-d}(t)|_\sigma \frac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n} \\
&= \log|N_K(\tau_1)| + \log|N_K(\beta^{-w_{+,n-d}})| + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \log^+|\beta^{w_{n-d}}|_\sigma. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

**Corollaire 3.17.** *En gardant les mêmes hypothèses que dans 3.11, alors il existe $u_\mathcal{A} \in \mathbb{N}^{n-d}$ et $(v_{\mathcal{A},\sigma,i})_{\substack{\sigma:K\to\mathbb{C}\\ i=1,\ldots,n}}$ une sous famille de $\mathbb{Q}^n$ tels que*

$$
h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) = \sum_{i=1}^{n-d} u_{\mathcal{A},i}\log|N_K(\tau_i)| + \sum_{\substack{\sigma:K\to\mathbb{C}\\ i=1,\ldots,n}} v_{\mathcal{A},\sigma,i}\log\Big|\frac{\beta_i}{\beta_0}\Big|_\sigma.
$$

*On a,*

$$
h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) \in \log(\overline{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{R}_{>0}).
$$

*Donc, si $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) \neq 0$, alors c'est un nombre transcendant.*

**Démonstration.** Ce résultat est une conséquence de 3.11 et de 3.16. Par la formule du corollaire, on voit clairement que $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) = \log(\gamma)$, avec $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{R}_{>0}$. Par le théorème de Baker (voir par exemple [21]), $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta})$ est transcendant si $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) \neq 0$. □

**Exemple 3.18.**

1. Soit $\beta \in (\mathbb{Q}^*)^{n+1}$ et $X_{A,\beta}$ est une hypersurface torique intègre de $\mathbb{P}^n$. Soit $w = (w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $w \in \ker({}^tA)$ où $A$ est la matrice dont les lignes sont les éléments de $\mathcal{A}$. On choisit $w$ tel que $\gcd(w_1,\ldots,w_n) = 1$. Alors la variété $X_{\mathcal{A},\beta}$ est définie par $\beta^{-w_+}x^w - \beta^{-w_-}$. Soient $a,b \in \mathbb{Z}$ avec $\gcd(a,b) = 1$ tels que $\beta^w = \frac{a}{b}$ (voir notation (16)). D'après (32), on a

$$
h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}) = \log|b\beta^{w_+}| + \log|\beta^{-w_+}| + \log^+|\beta^w| = \log\max(|a|,|b|). \qquad (33)
$$

2. Soit $c = (c_1, c_2, c_3) \in (\mathbb{Q}^*)^3$. Soit $\mathcal{A}$ le singleton $(1, -1, 3)$. On considère la variéte torique associée $X_{\mathcal{A},c}$, c'est une courbe dans $\mathbb{P}^3$. On considère $u_1 := (-2, 1, 1, 0)$, $u_2 := (0, 2, -1, -1)$, $w_1 := (1, 1, 0)$ et $w_2 := (2, -1, -1)$. Soit $M$ la matrice suivante

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

C'est une matrice qui vérifie les conditions de la définition A.4. Donc d'après la proposition A.7, $R_1 = c_1^{-1}c_2^{-1}T^{u_{+,1}} - T^{u_{-,1}}$ et $R_2 = c_1^{-2}T^{u_{+,2}} - c_2^{-1}c_3^{-1}T^{u_{-,2}}$ définissent une variété torique qui satisfait Définition 3.1 et le résultat du Lemme 3.4. On vérifie que cette variété coïncide avec $X_{\mathcal{A},c}$. On se propose de donner une formule pour $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},c})$ pour tout $c \in (\mathbb{Q}^*)^3$. En gardant les mêmes hypothèses et notations, on a la formule suivante pour la hauteur canonique de $\mathcal{X}_{\mathcal{A},c}$

**Théorème 3.19.** *Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $\frac{a}{b} = \beta^{w_1} (= c_1c_2)$ et $\gcd(a, b) = 1$. Si $|c_1c_2| < 1$, alors*

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},c}) = 2\log\max(|a|, |b|) + 2\log|\tau_2| - 2\log|c_1| + 2\log|c_2| \\ + \log^+|c_1^3c_3^{-1}| + \log^+|c_2^{-3}c_3^{-1}|$$

*Si $|c_1c_2| \geq 1$, alors*

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},c}) = 2\log\max(|a|, |b|) + 2\log|\tau_2| - 4\log|c_1| + 2\log^+|c_1^2c_2^{-1}c_3^{-1}|.$$

*En particulier, si $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}$ avec $\gcd(c_i, c_j) = 1$ pour tout $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ alors, on a*

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},c}) = 2\log|c_1c_2| + \log\max(|c_1^2|, |c_2c_3|).$$

Démontrons ce résulat. On pose $A_1 := A$. Par construction, on observe que $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\{x \in \mathbb{Z}^3 | < x, w_1 >= 0\}$. On pose $A_2$ la matrice de taille $3 \times 2$ suivante

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On note par $a'_1$, $a'_2$, $a'_3$ les lignes de $A_2$ et on pose $a'_0 = (0, 0)$ et $c_0 = 1$ et on note $\mathcal{A}_2 = \{a'_0, a'_1, a'_2, a'_3\}$. D'après le théorème 3.10, on sait que le courant $\left(dd^c \max(1, |c_1t^{a'_1}|, |c_2t^{a'_2}|, |c_3t^{a'_3}|)\right)^2$ est déterminé en termes d'un ensemble fini de points $S$ dans $\mathbb{R}^2$. Rappelons que $s \in S$, s'il existe $i_0, i_1, i_2, i_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$ tels que $|c_{i_0}(e^s)^{a'_{i_0}}| = |c_{i_2}(e^s)^{a'_{i_1}}| = |c_{i_2}(e^s)^{a'_{i_2}}| = |c_{i_3}(e^s)^{a'_{i_3}}|$ et $|c_j(e^s)^{a'_j}| < |c_{i_0}(e^s)^{a_{i_0}}|$ pour tout $j \in \{0, 1, 2, 3\} \setminus \{i_0, i_1, i_2, i_3\}$.

On pose $u_i := \log|t_i|$ et $\alpha_i := \log|c_i|$ pour $i = 1, 2$. On dispose de 5 situations à étudier :

(a) Le cas $1 = |c_1t_1| = |c_2t_1^{-1}|$ et $|c_3t_2| < 1$. Cela donne $u_1 = -\alpha$, $u_1 = \alpha_2$. Si $\alpha_2 \neq -\alpha_1$ alors l'ensemble des solutions est vide. Si $\alpha_2 = -\alpha_1$, alors l'ensemble des solutions $(u_1, u_2)$ correspond à une demi-droite. Donc, $\big(dd^c \max(1, |c_1t^{a'_1}|, |c_2t^{a'_2}|, |c_3t^{a'_3}|)\big)^2$ est nulle au voisinage de tout point $(t_1, t_2)$ tel que $(u_1, u_2)$ soit proche de cette demi-droite (voir la preuve du théorème 3.10).

   i. Plus généralement, soient $i_1, i_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$. On considère le système suivant $|c_{i_1}t^{a'_{i_1}}| = |c_{i_2}t^{a'_{i_2}}| > |c_jt^{a'_j}|$ pour tout $j \neq i_1, i_2$. Alors, donc comme avant que l'intersection de $S$ avec l'ensemble des solutions de ce système est vide. On vérifie que l'intersection de $S$ avec l'ensembe des solutions de ce système est vide.

(b) Le cas $1 = |c_1t_1| = |c_3t_2|$ et $|c_2t_1^{-1}| < 1$. On a alors $u_1 = -\alpha_1$, $u_2 = -\alpha_3$ et $\alpha_2 < u_1$. Donc, si $\alpha_2 \leq -\alpha_1$, alors on dispose d'une solution unique $s = (-\alpha_1, -\alpha_3) \in S$.

(c) $1 = |c_2t_1^{-1}| = |c_3t_2|$ et $|c_1t_1| < 1$. On vérifie qu'on dispose d'une unique solution $s = (\alpha_2, -\alpha_3) \in S$ si et seulement si $\alpha_2 \leq -\alpha_1$.

(d) Le cas $|c_1t_1| = |c_2t_1^{-1}| = |c_3t_2|$ et $|c_1t_1| < 1$. On vérifie qu'on a une unique solution $s = (\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}, -\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_1}{2} - \alpha_3)$ si et seulement si $\alpha_2 \geq -\alpha_1$.

(e) $1 = |c_1t_1| = |c_2t_1^{-1}| = |c_3t_2|$. On a une unique solution $s = (-\alpha_1, -\alpha_3)$ si et seulement si $-\alpha_1 = \alpha_2$.

Récapitulons ; On distingue 2 situations :

– Lorsque $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$ c-à-d $|c_1c_2| < 1$, alors $S = \{s_1, s_2\}$ avec $s_1 = (-\alpha_1, -\alpha_3)$ et $s_2 = (\alpha_2, -\alpha_3)$, et $\deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_1}}}) = \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_2}}}) = 1$ puisque $\mathcal{A}'_{I_{s_1}} = \{a'_1, a'_3\}$ et $\mathcal{A}'_{I_{s_3}} = \{a'_2, a'_3\}$.
– $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$ alors $S = \{s_1\}$ avec $s_1 = (\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_3)$, et $\deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_1}}}) = 2$ puisque $\mathcal{A}'_{I_{s_1}} = \{a'_2 - a'_1, a'_3 - a'_1\}$.

On a $*_{\mathcal{A}_2,c}(t_1, t_2) = (1, c_1t_1, c_2t_1^{-1}, c_2t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*$ (voir les notations (4)), donc $R_2\big(*_{\mathcal{A}_2,c}(t_1, t_2)\big) = t_1^2 - t_1^{-1}t_2$. On a alors,

$$\int\limits_{\mathcal{X}_{\mathcal{A}_2,\beta}(\mathbb{C})} \log\big\|R_2\big\|_\infty c_1\big(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty\big)^2$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^2(\mathbb{C})} \log \frac{|t_1^2 - t_1^{-1}t_2|}{\max(1, |c_1t_1|, |c_2t_1^{-1}|, |c_3t_2|)^2} \big(dd^c \log\max(1, |c_1t_1|, |c_2t_1^{-1}|, |c_3t_2|)\big)^2.$$

Si l'on note $s := (r_1, r_2) \in S$, alors par la formule de Jensen, on a

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2(\mathbb{C})} \log \frac{|t_1^2 - t_1^{-1}t_2|}{\max(1, |c_1t_1|, |c_2t_1^{-1}|, |c_3t_2|)^2} \delta_{\mathbf{S}_s}$$

$$= 2\log|r_1| + \log^+|r_1^{-3}r_2| - 2\log\max(1, |c_1r_1|, |c_2r_1^{-1}|, |c_3r_2|).$$

Donc, si $|c_1c_2| < 1$ (c-à-d $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$) alors

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{T}^2(\mathbb{C})} \log \frac{|t_1^2 - t_1^{-1}t_2|}{\max(1, |c_1t_1|, |c_2t_1^{-1}|, |c_3t_2|)^2} \big(dd^c \log\max(1, |c_1t_1|, |c_2t_1^{-1}|, |c_3t_2|)\big)^2 \\
&\quad = \sum_{i=1}^{2} \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_i}},1}) \int\limits_{\mathbb{T}^2(\mathbb{C})} \log \frac{|t_1^2 - t_1^{-1}t_2|}{\max(1, |c_1t_1|, |c_2t_1^{-1}|, |c_3t_2|)^2} \delta_{\mathbf{S}_{s_i}} \\
&\quad = -2\log|c_1| + \log^+|c_1^3c_3^{-1}| - 2\log^+|c_1c_2| + 2\log|c_2| \\
&\qquad + \log^+|c_2^{-3}c_3^{-1}| - 2\log^+|c_1c_2| \\
&\quad = -2\log|c_1| + 2\log|c_2| + \log^+|c_1^3c_3^{-1}| + \log^+|c_2^{-3}c_3^{-1}|.
\end{aligned}$$

D'après (33),

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_2,c}) = \log\max(|a|, |b|),$$

avec $\frac{a}{b} = \beta^{w_1}(= c_1c_2)$ et $\gcd(a, b) = 1$.
Par suite,

$$\begin{aligned}
h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},c}) &= 2h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}_2,c}) + 2\log|\tau_2| - 2\log|c_1| + 2\log|c_2| \\
&\quad + \log^+|c_1^3c_3^{-1}| + \log^+|c_2^{-3}c_3^{-1}| \\
&= 2\log\max(|a|, |b|) + 2\log|\tau_2| - 2\log|c_1| + 2\log|c_2| \\
&\quad + \log^+|c_1^3c_3^{-1}| + \log^+|c_2^{-3}c_3^{-1}|
\end{aligned}$$

Si $|c_1c_2| \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{T}^2(\mathbb{C})} \log \frac{|t_1^2 - t_1^{-1}t_2|}{\max(1, |c_1t_1|, |c_2t_1^{-1}|, |c_3t_2|)^2} \big(dd^c \log\max(1, |c_1t_1|, |c_2t_1^{-1}|, |c_3t_2|)\big)^2 \\
&\quad = \deg(X_{\mathcal{A}'_{I_{s_1}},1}) \int\limits_{\mathbb{T}^2(\mathbb{C})} \log \frac{|t_1^2 - t_1^{-1}t_2|}{\max(1, |c_1t_1|, |c_2t_1^{-1}|, |c_3t_2|)^2} \delta_{\mathbf{S}_{s_1}} \\
&\quad = -2\log|c_1| + 2\log|c_2| + 2\log^+|c_1^2c_2^{-1}c_3^{-1}| - 2\log^+|c_1c_2| \\
&\quad = -4\log|c_1| + 2\log^+|c_1^2c_2^{-1}c_3^{-1}|.
\end{aligned}$$

Donc, de la même manière précédente on trouve que

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\mathcal{X}_{\mathcal{A},c}) = 2\log\max(|a|, |b|) + 2\log|\tau_2| - 4\log|c_1| + 2\log^+|c_1^2c_2^{-1}c_3^{-1}|,$$

où $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $\frac{a}{b} = \beta^{w_1}(= c_1c_2)$ et $\gcd(a, b) = 1$.

La dernière formule du théorème se déduit aisément de la deuxième formule.

**Remarque 3.20.** Soit $c \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On considère la matrice suivante de taille $8 \times 10$

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2c & 0 & 2c-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2c-1 & 0 & 2c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2c+1 & 0 & 2c-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4c+1 & 0 & 4c-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$M$ definit une sous-variété dans $\mathbb{P}^9$ (pour la construction voir (34)). On observe que M est mixte avec contenu égal à 1, mais $M$ n'est dominante (voir les définitions de Appendice A). En effet, la sous-matrice formée par les 8 premières colonnes est mixte. On considère la variété $X_{\mathcal{A},1} \subset \mathbb{P}^9$ donnée par $\mathcal{A} = \{1, -1, 2c-1, 2, 2c, -2, 2c-2, 4c-2\} \subset \mathbb{Z}$. Les lignes de $M$ forment une $\mathbb{Z}$-base pour $\ker(1, -1, 2c-1, 2, 2c, -2, 2c-2, 4c-2)$. Mais $X_{\mathcal{A},1}$ ne vérifie pas la condition $\mathscr{A}$. Soit $f$ le morphisme suivant,

$$f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^9, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_i x_j, 0 \leq i, j \leq 3].$$

On vérifie que $X_{\mathcal{A},1}$ est l'image de $X_{\mathcal{A}_0,1} \subset \mathbb{P}^3$ par $f$, où $X_{\mathcal{A}_0,1}$ est une variété torique avec $\mathcal{A}_0 = \{1, -1, 2c-1\}$ et que la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} 0 & c & 1-c & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vérifie Définition A.4 et qu'elle définit $X_{\mathcal{A},c}$ (voir les définitions et la construction de Appendice A). Donc cette variété satisfait l'hypothèse $\mathscr{A}$ d'après Proposition A.7. Soit $\beta' \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^4$, et $\beta := f(\beta')$. Alors on a (par [18, Théorème 5.5.6])

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(X_{\mathcal{A},\beta}) = h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(f_* X_{\mathcal{A}_0,\beta'}) = h_{f^*\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(X_{\mathcal{A}_0,\beta'}) = h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(X_{\mathcal{A}_0,\beta'}).$$

Donc, si l'on suppose en plus que $\beta' \in (F^*)^{n+1}$ où $F$ est un corps de nombres dont l'anneau des entiers soit factoriel par rapport à $\mathcal{A}_0$, alors on dispose d'une formule pour la hauteur canonique de $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}$ similaire au cas étudié précédemment.

Cette observation suggère la généralisation suivante : Soient $d \leq N$ deux entiers positifs. Soit $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_N\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ avec $L_{\mathcal{A}} \simeq \mathbb{Z}^d$ et soit $A$ la matrice associée. On suppose que $A = C \cdot B$ avec $B$ (resp. $C$) une matrice de taille $N \times n$ (resp. $n \times d$) à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On note par $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) l'ensemble formé par les lignes de $B$ (resp. $C$). On suppose que $\mathcal{C}$ défini un morphisme monomial de $\mathbb{P}^n$ vers $\mathbb{P}^N$ qu'on note par $f$. Soit $\beta \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ telque $\beta = f(\beta')$ avec $\beta' \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$. Supposons que $\mathcal{B}$ et $\beta'$ vérifient les conditions $\mathscr{A}$ et que $\beta' \in (F^*)^{n+1}$ où $F$ est un corps de nombres dont l'anneau des entiers soit factoriel. Alors, on dispose d'une formule pour la hauteur canonique pour $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\beta}$ similaire au cas précédent.

## 4. Un résultat sur les métriques admissibles

Dans cette section on va montrer un résultat technique à savoir le théorème 4.4. Rappelons qu'on l'a utilisé dans la preuve de la proposition 3.9.

**Définition 4.1.** Soit $X$ une variété projective complexe de dimension $d$ et $(L, \|\cdot\|)$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne continue sur $X$. On dit que $\|\cdot\|$ est admissible s'il existe $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de métriques hermitiennes positives de classe $\mathcal{C}^\infty$, qui converge uniformément vers $\|\cdot\|$ sur $L$.

On définit alors le premier courant de Chern associé à $(L, \|\cdot\|)$, le courant $c_1(L, \|\cdot\|)$ défini localement par :

$$dd^c\big(-\log\|s\|^2\big),$$

où $s$ est une section locale holomorphe non nulle de $L$. D'après [7], on peut aussi considérer les puissances du courant $c_1(L, \|\cdot\|)$.

Il est bien connu que lorsque la métrique est $\mathcal{C}^\infty$ et strictement positive, alors le support de $c_1(L, \|\cdot\|)^d$ est Zariski-dense. En fait, on montre qu'il est égal à $X$. Le théorème 4.4 a pour but d'établir le même résultat pour les fibrés en droites admissibles. Commençons d'abord par l'exemple suivant ; si on considère les métriques canoniques sur une variété torique lisse $X$, alors on montre dans [18], que ces dernières sont admissibles et on calcule explicitement les différentes puissances des courants de Chern associés, en particulier le support des puissances maximal est le sous-tore compact $(\mathbb{S}^1)^d$, qui est dense pour la topologie de Zariski dans $X$. En effet, si $P = \sum_\nu a_\nu x^\nu$ est un polynôme à $d$ variables, nul sur $(\mathbb{S}^1)^d$, c'est à dire $\sum_\nu a_\nu e^{i<\nu,\theta>} = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$. Alors, par orthogonalité des fonctions trigonométriques, on trouve que $a_\nu = 0$.

Un autre exemple est celui d'une métrique $\|\cdot\|$ qui provient d'un système dynamique sur $(X, L, f)$, alors $\|\cdot\|$ est admissible, voir [22]. On montre que le support coïncide avec l'ensemble de Julia associé à $f$, voir [12], et que ce dernier contient les points périodiques de $f$ qu'on montre qu'il est Zariski-dense dans $X$, voir [9, Theorem 5.1]. Par conséquent, le support de $c_1(L, \|\cdot\|)^{\dim(X)}$ est Zariski-dense. Ces résultats sont une combinaison des théorèmes ci-dessous :

Rappelons le théorème suivant sur la densité des points périodiques définis par une dynamique algébrique :

**Théorème 4.2.** *Soit $X$ une variété projective sur un corps algébriquement clos $k$, $\phi : X \to X$ un morphisme dominant et $L$ un fibré en droites sur $X$ tels que $\phi^*L \otimes L$ soit ample. Alors le sous-ensemble de $X(k)$ formé des points périodiques de $\phi$ est Zariski-dense dans $X$.*

**Démonstration.** Voir [9, Theorem 5.1]. □

Si $\|\cdot\|_f$ la métrique invariante par $f$, si l'on pose

$$\mu_f = \frac{1}{\deg_L(X)} c_1(L, \|\cdot\|_f)^{\dim X}$$

Lorsque $k = \mathbb{C}$. Pour tout $m \geq 1$, on note par $P_m$ l'ensemble des points dans $X(\mathbb{C})$ périodiques de période $m$ comptés avec multiplicités. Considérons

$$\delta_{P_m} = \frac{1}{\operatorname{Card}(P_m)} \sum_{z \in P_m} \delta_z$$

on a le théorème suivant :

**Théorème 4.3.** *Si $X = \mathbb{P}^n$, la suite $\delta_{P_m}$ converges faiblement vers $\mu_f$.*

**Démonstration.** Voir [3]. □

Soit $X$ un sous-ensemble analytique de $\mathbb{P}^n$ de dimension $d$. Soit $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ un fibré en droites admissible sur $\mathbb{P}^n$. On a

**Théorème 4.4.** *Soit $X$ une variété projective complexe de dimension $d$. Si $\overline{L}$ est un fibré en droites admissible tel que $c_1(L)^d \neq 0$, alors le support du courant $c_1(\overline{L})^d$ est Zariski-dense dans $X$.*

*Si $H$ est une hypersurface de $X$, alors*

$$\int_X \rho c_1(\overline{L})^d = \int_{X \setminus H} \rho c_1(\overline{L})^d,$$

*pour toute fonction $\rho$ continue sur $X$.*

**Démonstration.** Par l'absurde, supposons qu'il existe une hypersurface $H$ de $X$ telle que

$$\operatorname{Supp}(c_1(\overline{L})^d) \subset H.$$

Par [16], il existe un morphisme propre $\pi : \widetilde{X} \to X$ avec $\widetilde{X}$ est une variété non-singulière et $E = \pi^{-1}(H)$ un diviseur à croisements normaux. On a $\pi^*\overline{L}$ est admissible et

$$\operatorname{Supp}(c_1(\pi^*\overline{L})^d) \subset E.$$

Vérifions ce dernier point, d'après [16], $\pi_{\widetilde{X} \setminus E}$ est un isomorphisme en $\widetilde{X} \setminus E$ et $X \setminus H$, donc $\left(c_1(\pi^*\overline{L})^d\right)_{|_{\widetilde{X} \setminus E}} = \pi^*\left(c_1(\overline{L})^d\right)_{|_{X \setminus H}}\big) = 0$, car $\operatorname{Supp}(c_1(\overline{L})^d) \subset H$ par hypothèse. En d'autres termes, on peut supposer que $H$ est un diviseur à croisements normaux.

On munit $\mathcal{O}(H)$ d'une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$, qu'on note par $\|\cdot\|_H$. Soit $x \in H$, il existe un voisinage ouvert $V$ de $x$, un système de coordonnées locales $\{z_1, \dots, z_d\}$ centré en $x$ et un entier $k$ tels que

$$H \cap V = \{z_1 \cdots z_k = 0\} = \cup_{j=1}^{k} \{z_j = 0\}.$$

Soit $j = 1, \dots, k$ et $\varepsilon > 0$. On considère $H_{j,\varepsilon}$, le sous ensemble ouvert de $V$ donné par $H_{j,\varepsilon} = \{|z_j| < \varepsilon\}$. Soit $\rho_{j,\varepsilon}$ une fonction à valeurs dans $[0,1]$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $X$ et à support dans $V$, nulle sur $V \setminus H_{j,2\varepsilon}$ et égale à 1 sur $H_{j,\varepsilon}$.

Comme le support de $c_1(\overline{L})^d$ est inclus dans $H$, alors pour $\varepsilon$ assez petit, le courant $\big(1 - \rho_{j,\varepsilon}\big) c_1(\overline{L})^d$ est nul sur $X$. Et on a,

$$\begin{aligned}
\int\limits_X \log \|z_j\|_H c_1(\overline{L})^d &= \int\limits_X \Big(\rho_{j,\varepsilon}(z) \log \|z_j\|_H + (1 - \rho_{j,\varepsilon}(z)) \log \|z_j\|_H\Big) c_1(\overline{L})^d \\
&= \int\limits_X \rho_{j,\varepsilon}(z) \log \|z_j\|_H c_1(\overline{L})^d \\
&= \int\limits_{H_{j,2\varepsilon}} \rho_{j,\varepsilon}(z) \log \|z_j\|_H c_1(\overline{L})^d \\
&\leq \log(2\varepsilon) \int\limits_{H_{j,2\varepsilon}} \rho_{j,\varepsilon}(z) c_1(\overline{L})^d + \log C \int\limits_{H_{j,2\varepsilon}} \rho_{j,\varepsilon}(z) c_1(\overline{L})^d
\end{aligned}$$

(car localement, il existe $C > 0$ tel que $\|z_j\|_H \leq C|z_j|$).

Par construction de $\rho_{j,\varepsilon}$, on vérifie que pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\int\limits_{H_{j,\varepsilon}} c_1(\overline{L})^d \leq \int\limits_{H_{j,2\varepsilon}} \rho_{j,\varepsilon}(z) c_1(\overline{L})^d \leq \int\limits_{H_{j,2\varepsilon}} c_1(\overline{L})^d,$$

on en déduit que la suite $\left(\int_{H_{j,\varepsilon}} \rho_{j,\varepsilon} c_1(\overline{L})^d\right)_{0<\varepsilon\ll 1}$ converge vers une limite finie $l$ lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro. Comme

$$\int\limits_X \log \|z_j\|_H c_1\big(\overline{L}\big)^d,$$

est finie, cela résulte de la théorie de Bedford et Taylor (voir [1]), on doit avoir nécessairement $l = 0$. Par conséquent

$$\int\limits_{H_{j,\varepsilon}} c_1(\overline{L})^d \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{} 0.$$

En posant $H_\varepsilon = \cup_{j=1}^k H_{j,\varepsilon}$, on a alors

$$\int\limits_{H_\varepsilon} c_1(\overline{L})^d \xrightarrow[\varepsilon\longrightarrow 0]{} 0.$$

On peut trouver un recouvrement finie par des ouverts $(V_\alpha)_{\alpha\in J}$ comme $V_\alpha$, et on pose comme plus $H_{\alpha,\varepsilon}$, alors $H \subset \cup_{\alpha\in J} H_{\alpha,\varepsilon}$.

Soit $\rho$ une fonction continue positive sur $X$, on a pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned}
0 \leq \int\limits_X \rho\, c_1(\overline{L})^d &\leq \int\limits_{X\setminus \overline{H}_\varepsilon} \rho\, c_1(\overline{L})^d + \int\limits_{\cup_{\alpha\in J} H_{\alpha,2\varepsilon}} \rho\, c_1(\overline{L})^d \\
&\leq \int\limits_{X\setminus \overline{H}_\varepsilon} \rho\, c_1(\overline{L})^d + \sum_{\alpha\in J} \int\limits_{H_{\alpha,2\varepsilon}} \rho\, c_1(\overline{L})^d \\
&= 0 + \sum_{\alpha\in J} \int\limits_{H_{\alpha,2\varepsilon}} \rho\, c_1(\overline{L})^d \quad \big(\text{car } c_1(\overline{L})^d_{|_{X\setminus \overline{H}_\varepsilon}} = 0\big) \\
&\leq \|\rho\|_{\sup} \sum_{\alpha\in J} \int\limits_{H_{\alpha,2\varepsilon}} c_1(\overline{L})^d.
\end{aligned}$$

Ce qui donne par passage à la limite : $\int_X \rho\, c_1(\overline{L})^d = 0$. Ce qui contredit les hypothèses du théorème. On conclut que si $\overline{L}$ est un fibré en droites admissible tel que $c_1(L)^d \neq 0$ alors le support de $c_1(\overline{L})^d$ est Zariski-dense dans $X$.

Par le même raisonnement on montre que $\int_X \rho\, c_1(\overline{L})^d = \int_{X\setminus H} \rho\, c_1(\overline{L})^d$, en effet, on a

$$\begin{aligned}
0 \leq \int\limits_X \rho\, c_1(\overline{L})^d &\leq \int\limits_{X\setminus \overline{H}_\varepsilon} \rho\, c_1(\overline{L})^d + \int\limits_{\cup_{\alpha\in J} H_{\alpha,2\varepsilon}} \rho\, c_1(\overline{L})^d \\
&\leq \int\limits_{X\setminus H} \rho\, c_1(\overline{L})^d + \sum_{\alpha\in J} \int\limits_{H_{\alpha,2\varepsilon}} \rho\, c_1(\overline{L})^d \\
&\leq \int\limits_{X\setminus H} \rho\, c_1(\overline{L})^d + \sum_{\alpha\in J} \int\limits_{H_{\alpha,2\varepsilon}} \rho\, c_1(\overline{L})^d \\
&\leq \int\limits_{X\setminus H} \rho\, c_1(\overline{L})^d + \|\rho\|_{\sup} \sum_{\alpha\in J} \int\limits_{H_{\alpha,2\varepsilon}} c_1(\overline{L})^d,
\end{aligned}$$

ce qui donne que $\int_X \rho\, c_1(\overline{L})^d \leq \int_{X\setminus H} \rho\, c_1(\overline{L})^d$. Par suite $\int_X \rho\, c_1(\overline{L})^d = \int_{X\setminus H} \rho\, c_1(\overline{L})^d$ pour toute fonction continue positive $\rho$, sur $X$. Lorsque $\rho$ est une fonction continue quelconque, on écrit $\rho = \rho_+ - \rho_-$, où $\rho_+ = \max(\rho, 0)$ et $\rho_- = \max(-\rho, 0)$. Et on déduit que

$$\int_X \rho\, c_1(\overline{L})^d = \int_{X\setminus H} \rho\, c_1(\overline{L})^d. \qquad \square$$


## Remerciements

Ce travail a été réalisé durant ma thèse sous la direction de Vincent Maillot, je tiens à le remercier pour ses conseils lors de la rédaction de cet article. Je remercie Antoine Chambert-Loir pour m'avoir signaler une erreur dans une version antérieure. Je remercie vivement le referee pour ses remarques et corrections pertinentes.


## Appendice A

Dans cette section, on rappelle quelques résultats donnant le lien entre certaines propriétés combinatorials des matrices et les propriétés algébriques d'idéaux binomiaux. On expliquera après comment produire des exemples de variétés toriques vérifiant la condition $\mathscr{A}$.

Dans [15], on considère les algèbres de la forme $R[S]$ avec $R$ un anneau commutatif unitaire et $S$ un semigroupe commutatif de type fini et on étudie les conditions sous lesquelles ces algèbres ont une représentation finie, une intersection complète... (voir aussi [6]). Dans [8], on étudie les idéaux binomiaux dans l'anneau des polyômes de Laurent à coefficients dans un corps. Un des résultats principaux de [8] donne une condition suffisante pour qu'un idéal binomial $I = (f_1, \dots, f_r)$, où $f_1, \dots, f_r$ sont des binômes, définit une suite régulière dans cet anneau. Cette condition suffisante stipule que les exposants de $f_1, \dots, f_r$ forment un système linéairement indépendant. Cette condition n'est plus suffisante si $I$ est un idéal de l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, voir [11, Example 2.1]. Dans [11], les auteurs donnent une condition pour que $I$ soit premier et l'algèbre $\mathbb{Z}[S]$ soit une intersection complète, où $S$ est un semigroupe associé à la matrice $M$ définie par les exposants de $f_1, \dots, f_r$. Pour cela, ils montrent qu'il suffit que $M$ vérifie certaines propriétés combinatorials, voir [11, Theorem 2.9, Corollary 2.10].

Soient $k$ et $n$ deux entiers positifs avec $k \leq n$. On note par $\mathcal{M}(k\times(n+1), \mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille $k \times (n+1)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $M \in \mathcal{M}(k \times (n+1), \mathbb{Z})$. On dit que $M$ est *mixte* si chaque ligne contient deux coefficients de signe différent. $M$ est dite *dominante* si $M$ ne contient pas une sous-matrice mixte de taille $k \times k$. On appelle *contenu* de $M$ et on le note par $\mathrm{cont}(M)$, le pgcd des mineurs de taille $k \times k$ de $M$.

Soit $\Omega$ un anneau commutatif unitaire. Soit $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. On pose $v_+ := (\max(0, v_0), \dots, \max(0, v_n))$ et $v_- := (\max(0, -v_0), \dots, \max(0, -v_n))$. Si $v \in \mathbb{N}^{n+1}$, on note par $T^v$ le polynôme de $\Omega[T_0, \dots, T_n]$ défini comme suit $T^v = T_0^{v_0} \cdots T_n^{v_n}$ et on pose $L_u := T^{u_+} - T^{u_-}$ pour tout $u \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

On considère $u_1, \dots, u_k$, $k$ vecteurs de $\mathbb{Z}^{n+1}$ et on pose

$$M = \begin{bmatrix} u_{10} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ u_{k,0} & u_{k,1} & u_{k,2} & \dots & u_{k,n+1} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$L_i := T^{u_{+,i}} - T^{u_{-,i}}$ pour $i = 1, \dots, k$, $I_M := (L_1, \dots, L_k)$ l'idéal de $\Omega[T_0, \dots, T_n]$ engendré par $L_1, \dots, L_k$, $I_M^* := (L_u | u \in \sum_{i=1}^k \mathbb{Z}u_i)$ et $\widehat{I}_M := (L_u | u \in \left(\sum_{i=1}^k \mathbb{Q}u_i\right) \cap \mathbb{Z}^{n+1})$. Clairement, on a

$$I_M \subset I_M^* \subset \widehat{I}_M.$$

**Proposition A.1.** *Suppose que $\Omega = \mathbb{Z}$. Soit $M \in \mathcal{M}(k \times (n+1), \mathbb{Z})$ une matrice mixte, dominante telle que les lignes sont linéairement indépendantes. Alors $I_M = I_M^*$. Réciproquement, si les lignes de $M$ sont linéairement indépendantes et $M$ est mixte alors le fait que $I_M = I_M^*$ implique que $M$ est dominante.*

**Démonstration.** Voir [11, Theorem 2.9]. $\square$

On définit $G_M := \mathbb{Z}^{n+1}/(u_1, \dots, u_k)$ et $S_M$ le semi-groupe de $G_M$ engendré par $e_0, \dots, e_n$, la base standard de $\mathbb{Z}^{n+1}$. On note par $\rho^*$ l'application surjective suivante,

$$\rho^* : \mathbb{N}^{n+1} \twoheadrightarrow S_M, \quad v = (v_0, \dots, v_n) \mapsto \sum_{i=0}^n v_i e_i.$$

Cette application induit le morphisme surjectif d'algèbres suivant

$$\Omega[\rho^*] : \Omega[T_0, \dots, T_n] \twoheadrightarrow \Omega[S_M], \quad T_i \mapsto 1_{\rho^*(e_i)}.$$

On pose $I_{S_M} := \ker(\Omega[\rho^*])$. D'après Herzog, on peut définir une $S_M$-graduation sur $\Omega[T_0, \dots, T_n]$ comme suit : $F \in \Omega[T_0, \dots, T_n]$ est dit homogène de degré $s \in S_M$, si $F = \sum_v \alpha_v X^v$ avec $\rho^*(v) = s$ pour tout $s$ tels que $\alpha_v \neq 0$ (voir [15, p. 177]).

On montre que

$$I_{S_M} = I_M^*,$$

voir [20, Lemma 4.35]. Rappelons la preuve ; Soit $u \in \sum_{i=1}^k \mathbb{Z}u_i$, on $\Omega[\rho^*](L_u) = 1_{\rho^*(u_+)} - 1_{\rho^*(u_-)} = 0$, puisque $u_+ - u_- = u \in (u_1, \dots, u_k)$, donc $I_M^* \subset I_{S_M}$. Réciproquement, soit $L = \sum_i^m \alpha_i X^{v_i} \in I_{S_M}$ homogène de degré $s \in S_M$, donc $(\sum_i \alpha_i) 1_s = 0$. Par suite,

$$L = \sum_i \alpha_i (X^{v_i} - X^{v_m}) = \sum_i \alpha_i X^{\inf(v_i, v_m)} (X^{(v_i - v_m)_+} - X^{(v_i - v_m)_-})$$

et $v_i - v_m \in \sum_{i=1}^{k} \mathbb{Z}u_i$ (car rappelons que $\rho^*(v_i) = s$ pour tout $i$.). On conclut que

$$I_{S_M} = I_M^*.$$

Lorsque $\mathrm{cont}(M) = 1$, alors on montre que $G_M \simeq \mathbb{Z}^{n+1-k}$. En particulier, on a dans ce cas $I_{S_M}$ est premier. En effet, on a $\Omega[S_M] \subset \Omega[G_M] \simeq \Omega[T_0^+, T_0^-, \ldots, T_{n-k}^+, T_{n-k}^-]$ qui est intègre.

**Proposition A.2.** *Suppose que $\Omega = \mathbb{Z}$. On a $\mathbb{Z}[S_M]$ est intersection complète si et seulement $M$ est dominante avec contenu* 1.

**Démonstration.** Voir [11, Corollary 2.10]. □

**Proposition A.3.** *Soient $M$ une matrice mixte $k \times (n+1)$ et $\Omega$ un anneau commutatif unitaire et intègre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$M$ est mixte et dominante avec* $\mathrm{cont}(M) = 1$.
2. *$I_M \subset \Omega[T_0, \ldots, T_n]$ est premier et $u_1, \ldots, u_k$ sont linéairement indépendants.*
3. *$I_M \subset K[T_0, \ldots, T_n]$ est premier d'hauteur $k$, où $K$ est un corps.*

**Démonstration.** [20, Proposition 4.47]. Notons que l'implication 1) $\Longrightarrow$ 3) peut se déduire des propositions A.1 et A.2 et en notant que si ces résultats sont vrais pour un anneau $\Omega_0$ alors ils restent valables pour tout anneau. □

Soit $M$ comme dans (34), et on suppose que $u_{i0} = -\sum_{j=1}^{n} u_{ij}$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. Donc, les polynômes $L_1, \ldots, L_k$ sont homogènes, et $I_M$ est un idéal homogène (par rapport à la graduation usuelle) définissant ainsi une sous-variété projective. Soient $K$ un corps et $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n) \in (K^*)^{n+1}$ avec $\gamma_0 = 1$. On note par $[\gamma]$ l'isomorphisme d'algèbres suivant

$$[\gamma] : K[T_0, \ldots, T_n] \to K[T_0, \ldots, T_n] \quad T_i \mapsto \gamma_i T_i.$$

On a clairement, $I_M$ est premier dans $K[T_0, \ldots, T_n]$ si et seulement si $[\gamma]^* I_M$ l'est aussi.

### *A.1. Une application*

Dans ce paragraphe on utilise les notations de la section 3. Soient $d \leq n$, $\beta \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$ avec $\beta_0 = 1$, $K$ et $R_1, \ldots, R_{n-d}$ comme dans la section 3. On aisément vérifie que $[\beta]^*(R_1, \ldots, R_{n-d}) = (L_1, \ldots, L_{n-d})$ dans $K[T_0, \ldots, T_n]$. Par suite, si $M$ est mixte, dominante et $\mathrm{cont}(M) = 1$, alors d'après ce qui précède, l'idéal $(R_1, \ldots, R_{n-d})$ est premier dans $K[T_0, \ldots, T_n]$. Cela nous motive à introduire la définition suivante

**Définition A.4.** Soit $M$ comme dans (34), avec $u_{i0} = -\sum_{j=1}^{n} u_{ij}$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. On dit que $M$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{I})$ s'il existe $(M_i)_{i=1,\ldots,k}$ une suite de sous-matrices de $M$ de taille $i \times (n+1)$ respectivement, telles que $M_i$ est une sous-matrice de $M_{i+1}$ pour tout $i = 1, \ldots, k-1$ et $M_i$ est mixte, dominante et $\mathrm{cont}(M_i) = 1$.

**Remarque A.5.** Si $M \in \mathcal{M}(k \times (n+1), \mathbb{Z})$ est mixte (resp. vérifie $\mathrm{cont}(M) = 1$) alors toute sous-matrice de $M$ de taille $i \times (n+1)$ est mixte (resp. a un contenu égal à 1).

**Exemple A.6.** Soient $c_1, c_2, c \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & 1 - c_1 & -1 \\ -c_2 - 1 & c_2 & 1 & 0, \end{bmatrix}$$

et

$$M_1 = \begin{bmatrix} c-1 & -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors $M_0$ et $M_1$ vérifient les hypothèses de la définition A.4. On vérifie que $M_0$ définit la courbe $X_{\mathcal{A}_0,1}$ dans $\mathbb{P}^3$ avec $\mathcal{A}_0 = \{1, -c_2, c_1 - c_2 + c_1 c_2\}$.

**Proposition A.7.** *Soit $M \in \mathcal{M}(n - d \times (n+1), \mathbb{Z})$ qui vérifie l'hypothèse $(\mathcal{I})$. Soit $\beta = (1, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^{n+1}$, alors $X_{\mathcal{A},\beta}$ vérifie la condition $\mathscr{A}$ (voir Définition 3.1).*

**Démonstration.** Comme $M$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{I})$, alors en particulier $M$ est dominante, mixte avec $\mathrm{cont}(M) = 1$, donc l'idéal $(R_1, \ldots, R_{n-d})$ est premier dans $K[T_0, \ldots, T_n]$, où $K = \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Quitte à réordonner les indices, on obtient par induction que $(R_i, \ldots, R_{n-d})$ est premier pour tout $i = 1, \ldots, n-d$. $\square$

**Remarque A.8.** Signalons qu'on dispose d'un algorithme en temps polynômial permettant de reconnaître si une matrice est mixte et dominante, voir [10, p. 198].

## Références

[1] Eric Bedford, B.A. Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math. 149 (1–2) (1982) 1–40.

[2] J.-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé, Heights of projective varieties and positive Green forms, J. Amer. Math. Soc. 7 (4) (1994) 903–1027.

[3] Jean-Yves Briend, Julien Duval, Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbf{C}\mathrm{P}^k$, Acta Math. 182 (2) (1999) 143–157.

[4] José Ignacio Burgos Gil, Atsushi Moriwaki, Patrice Philippon, Martín Sombra, Arithmetic positivity on toric varieties, arXiv:1210.7692 [math.AG], October 2012.

[5] José Ignacio Burgos Gil, Patrice Philippon, Martín Sombra, Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights, arXiv:1105.5584v1 [math.AG], Mai 2011.

[6] Charles Delorme, Sous-monoïdes d'intersection complète de $N$, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 9 (1) (1976) 145–154.

[7] Jean-Pierre Demailly, Monge–Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, in: Complex Analysis and Geometry, in: Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1993, pp. 115–193.
[8] David Eisenbud, Bernd Sturmfels, Binomial ideals, Duke Math. J. 84 (1) (1996) 1–45.
[9] Najmuddin Fakhruddin, Questions on self maps of algebraic varieties, J. Ramanujan Math. Soc. 18 (2) (2003) 109–122.
[10] Klaus G. Fischer, Walter Morris, Jay Shapiro, Mixed dominating matrices, Linear Algebra Appl. 270 (1998) 191–214.
[11] Klaus G. Fischer, Jay Shapiro, Mixed matrices and binomial ideals, J. Pure Appl. Algebra 113 (1) (1996) 39–54.
[12] John Erik Fornæss, Nessim Sibony, Complex dynamics in higher dimensions, in: Complex Potential Theory, Montreal, PQ, 1993, in: NATO Adv. Stud. Inst. Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci., vol. 439, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994, pp. 131–186, notes partially written by Estela A. Gavosto.
[13] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants, Mod. Birkhäuser Class., Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008, reprint of the 1994 edition.
[14] Henri Gillet, Christophe Soulé, Arithmetic intersection theory, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 72 (1990) 93–174.
[15] Jürgen Herzog, Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings, Manuscripta Math. 3 (1970) 175–193.
[16] Heisuke Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, Ann. of Math. (2) 79 (1964) 109–203;
Heisuke Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. II, Ann. of Math. (2) 79 (1964) 205–326.
[17] Serge Lang, Algebra, third edition, Grad. Texts in Math., vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.
[18] Vincent Maillot, Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) 80 (2000), vi+129 pp.
[19] Patrice Philippon, Martín Sombra, Hauteur normalisée des variétés toriques projectives, J. Inst. Math. Jussieu 7 (2) (2008) 327–373.
[20] Norberts Röhrl, Binomial regular sequences and s-matrices, Diploma thesis, 1998.
[21] Michel Waldschmidt, Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups: Transcendence Properties of the Exponential Function in Several Variables, Grundlehren Math. Wiss., vol. 326, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
[22] Shouwu Zhang, Small points and adelic metrics, J. Algebraic Geom. 4 (2) (1995) 281–300.