Stochastic Processes and their Applications 47 (1993) 275–297
North-Holland

Analyse multi-échelle des processus gaussiens markoviens d'ordre p indexés par (0, 1)

Albert Benassi
Laboratoire de Calcul des Probabilités, Université Paris-VI, Paris, France

Stéphane Jaffard
C.E.R.M.A., Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, La Courtine, Noisy-le-grand, France

Daniel Roux
Université Blaise Pascal, Les Cézeaux, Aubière, France

Received 7 November 1991
Revised manuscript received 4 November 1992

We perform a multiscale analysis of Gaussian Markovian processes of order p on (0, 1). Namely, we construct a wavelet basis orthonormal for the scalar product given by the symmetric Dirichlet form of the process. As an application, we exhibit the connexion between the multiscale analysis concept and the Markov property of order p, and we prove the law of iterated logarithm and the uniform modulus law for the $(p-1)$th derivative of this process.

Nous effectuons l'analyse multi-échelle des processus gaussiens markoviens d'ordre p, indexés par (0, 1). C'est-à-dire que nous construisons des bases d'ondelettes qui sont des bases orthonormées de l'espace de l'énergie d'une forme de Dirichlet symétrique d'ordre $2p$. Comme application de cette analyse, nous mettons en évidence un lien étroit entre analyse multi-échelle et propriété de Markov d'ordre p, puis nous démontrons les lois du logarithme itéré et du module uniforme du processus dérivé d'ordre $p-1$.

AMS 1991 Subject Classification: 60J25.

Gaussian process * Markov germ property * wavelets * modulus of continuity

Introduction

La théorie des ondelettes s'est révélée être un puissant outil d'analyse des éléments de la plupart des espaces fonctionnels classiques. En général une base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$, est construite à partir d'une seule fonction Λ. La base de $L^2(\mathbb{R})$ est alors donnée par

$$\Lambda_{j,k}(x) = 2^{j/2}\Lambda(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Correspondence to: Dr. Albert Benassi, Mathématique Appliquées, Université de Clemont-Ferrand II (Blaise Pascal), Complexe Scientifique des Cézeaux, 63177 Aubière Cedex, France.

0304-4149/93/$06.00 © 1993—Elsevier Science Publishers B.V. All rights reserved

Ainsi dans beaucoup de situations, l'ensemble des ondelettes de la base est codé par les points dyadiques du domaine où les fonctions à analyser sont définies. Ceci a permis dans Jaffard (1991) d'estimer la régularité locale en x d'une fonction f à l'aide de la suite des coefficients d'ondelettes de f.

C'est un tel point de vue que nous voulons développer dans cet article, pour la classe des processus gaussiens possédant la propriété de Markov germe d'ordre fini. Un tel point de vue est déjà ancien et remonte à Paul Lévy. En effet la décomposition de Paul Lévy du mouvement brownien sur la base de Schauder est, avant la lettre, la première décomposition en ondelettes de ce processus.

Nous préférons employer l'expression analyse multi-échelle car il est frappant que, pour le processus de Wiener, l'invariance en loi

$$\mathrm{Loi}(\nu X_{t/\nu^2};\ t \geqslant 0) = \mathrm{Loi}(X_t;\ t \geqslant 0) \quad \forall \nu > 0$$

soit exprimable en terme d'invariance d'échelle.

Kahane (1982) utilise cette décomposition du processus de Wiener pour introduire les notions de points lents et de points rapides.

Notons aussi la contribution de Kerkyacharian et Roynette (1991) qui étudient la convergence des approximations polygonales du mouvement brownien dans les espaces holdériens C^{ν}, $0 \leqslant \nu < \frac{1}{2}$.

Dans un cadre plus large, citons aussi l'article de Benassi (1992) où quelques applications de l'analyse multi-échelle aux probabilités sont indiquées.

Le but de cet article est d'effectuer l'analyse multi-échelle des processus gaussiens centrés possédant la propriété de Markov germe d'ordre fini. Pour cela nous sommes amenés à construire des bases d'ondelettes, à support dans les cellules dyadiques, de l'espace de l'énergie d'une forme de Dirichlet symétrique d'ordre fini. De cette analyse nous tirons deux applications:

- la première montre un lien étroit entre propriété de Markov germe et analyse multi-échelle. Ceci nous permet de redémontrer en dimension un d'une manière originale le résultat de Pitt (1971) d'équivalence dans le cas gaussien ente markovianté et localité.
- la seconde qui donne la loi du module uniforme et la loi du logarithme itéré pour le processus dérivé d'ordre $p-1$, lorsque la forme de Dirichlet est d'ordre $2p$.

Dans le cas où les coefficients de la forme de Dirichlet considérée sont suffisamment réguliers, le théorème d'Inoué (1976) donne une condition suffisante d'équivalence des mesures gaussiennes markoviennes d'ordre fini. Ceci permet de ramener l'obtention des deux lois ci dessus au cas où la forme de Dirichlet considérée est réduite à son terme de plus haut degré. Dans ce cas, le Théorème 1.6 où ces lois sont énoncées admet une démonstration plus simple. Mais le cadre plus général de nos hypothèses ne permet pas d'utiliser le théorème d'Inoué. Nos résultats sont donc nouveaux dans ce contexte.

La méthode développée fournit des démonstrations nouvelles des lois du logarithme itéré et du module uniforme pour le mouvement brownien. Enfin, nous devons ajouter que le résultat de régularité du Théorème 2 est obtenu sous des hypothèses beaucoup plus faibles que dans les travaux de Benassi (1982), Benfatto, Galavotti et Nicolò (1980), et Russek (1980).

Les résultats principaux de ce papier ont été annoncés dans une note par les auteurs (1991).

1. Résultats

1.1. Soit $\{X(x);\, x\in[0,1]\}$ un processus gaussien centré, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{H}_X$ le sous espace gaussien de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ engendré par X. L'espace autoreproduisant H_X de X est l'espace des fonctions réelles définies sur $[0, 1]$ par

$$H_X = \{U_Z \mid U_Z(x) = \mathbb{E}(X(x)Z),\ x\in[0,1],\ Z\in\mathcal{H}_X\} \tag{1}$$

muni du produit scalaire

$$\langle U_Z, U_V\rangle_{H_X} = \mathbb{E}(ZV). \tag{2}$$

Pour toutes ces questions on peut consulter Neveu (1968).

1.2. Propriété de Markov d'ordre p

La propriété de Markov (germe) a beaucoup été étudiée. Dans le cas général on pourra consulter Pitt (1971); dans le cas particulier où nous sommes, nous suivrons Russeck (1980) et nous poserons:

Définition 1.1. Un processus gaussien centré $\{X(x), x\in[0,1]\}$ est un processus markovien d'ordre p si

(i) $\mathbb{P}(X\in C^{p-1}) = 1$;

(ii) le vecteur des dérivées $\{X^{(0)}(x), \ldots, X^{(p-1)}(x);\, x\in[0,1]\}$ est markovien au sens usuel.

Remarque 1. Si X est un processus markovien d'ordre p, d'après Pitt (1971), la tribu germe $\bigcap_{\varepsilon>0}\sigma\{X(x),\, x\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ est égale à la tribu engendrée par le vecteur $(X(a), \ldots, X^{p-1}(a))$. Ainsi la propriété de Markov germe et la propriété de Markov d'ordre p coincident dans ce cas.

La notion de markovianité est reliée à celle d'espace local. Soit H un espace de Hilbert de fonctions réelles de classe C^{p-1} sur $[0, 1]$, nous dirons:

Définition 1.2. H est local si

(i) $f\in H$ et $f^{(k)}(x) = 0$ pour $k = 0, \ldots, k = p-1 \Rightarrow f\mathbb{1}_{(0,x)}$ et $f\mathbb{1}_{(x,1)}\in H$;

(ii) $\forall f, g\in H$, si $\operatorname{Supp}(f)\subset[0,x]$ et $\operatorname{Supp}(g)\subset[x,1]$ alors $\langle f, g\rangle_H = 0$.

Dans notre situation nous avons le résutat suivant, dû à Pitt (1971).

Soit X un processus gaussien centré. Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes:

(i) X est markovien d'ordre p;

(ii) H_X est local.

Le théorème de Peetre nous dit alors que le produit scalaire de H_X est donné par une forme de Dirichlet symétrique, soit

$$\langle f, g\rangle_{H_X} = \sum_{0\leq \alpha,\beta\leq p} \int_0^1 a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha f(x) D^\beta g(x)\,\mathrm{d}x := \mathscr{A}(f, g) \tag{3}$$

avec $D^\alpha = \mathrm{d}^\alpha/\mathrm{d}x^\alpha$.

L'espace $\mathscr{D}(0, 1)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support dans $(0, 1)$. L'espace $H^p(0, 1)$ est l'espace de Sobolev d'ordre p et $H_0^p(0, 1)$ est la fermeture de $\mathscr{D}(0, 1)$ dans $H^p(0, 1)$. L'espace H_a est l'espace de l'énergie de la forme de Dirichlet $\mathscr{A}$ et l'espace $H_{a,0}$ est la fermeture de $\mathscr{D}(0, 1)$ dans H_a.

1.3. Base orthonormée d'ondelettes de H_X

Sur les coefficients de la forme $\mathscr{A}$ nous ferons les hypothèses H_A suivantes:

(i) Régularité: $a_{\alpha,\beta} \in L^\infty(0, 1)$, $0\leq \alpha, \beta\leq p$.

(ii) Symétrie: $a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha}$ dans L^∞, $0\leq\alpha, \beta\leq p$.

(iii) Coercivité: $\exists\gamma>0$, $\mathscr{A}(h, h)\geq \gamma|h|^2_{H_0^p}$ $\forall h\in\mathscr{D}(0, 1)$.

Pour coder les ondelettes et les cellules dyadiques de $(0, 1)$, introduisons l'ensemble J des mots dyadiques de longueur fine

$$J = \bigcup_{k\geq 0} J_k, \quad \text{avec } J_0 = \{*\},\ J_k = \{0, 1\}^k.$$

Notons $|j|$ la longueur de j, de telle sorte que $j\in J_{|j|}$. Les cellules dyadiques Δ_j seront $\Delta_* = (0, 1)$, $\Delta_0 = (0, \frac{1}{2})$, $\Delta_1 = (\frac{1}{2}, 1)$, $\Delta_{(0,0)} = (0, \frac{1}{4})$, etc. Si $j = (j_1, \ldots, j_k)\in J_k$ et $j' = (j'_1, \ldots, j'_l)\in J_l$ le mot $(j_1, \ldots, j_k, j'_1, \ldots, j'_l)$ de longueur $k+l$ est noté jj'. Pour finir, $\tilde{J}$ désignera l'ensemble $\{1, \ldots, p\}\times J$.

Le théorème suivant fournit une analyse multi-échelle de l'espace $H_{a,0}$.

Théorème 1.3. *Sous l'hypothèse* H_A, *l'espace* $H_{a,0}$ *admet une base orthonormée d'ondelettes* $\{\Lambda_{i,j};\ (i, j)\in\tilde{J}\}$ *vérifiant*:

(i) *Localisation*: $\mathrm{Supp}(\Lambda_{i,j}) = \bar{\Delta}_j$ *pour* $(i, j)\in\tilde{J}$.

(ii) *Régularité*: *il existe deux constantes* c *et* C, $0<c<C<\infty$ *telles que, si* $m\in\mathbb{N}$, $0\leq m\leq(p-1)$, *alors*

$$c2^{(p-1/2-m)|j|}\leq |D^m\Lambda_{i,j}|_\infty\leq C2^{(p-1/2-m)|j|}. \tag{4}$$

(iii) *Il existe une constante* $K>0$ *telle que*

$$|D^{p-1}\Lambda_{i,j}(y) - D^{p-1}\Lambda_{i,j}(x)|\leq K2^{|j|/2}|y-x| \quad \textit{pour } (i, j)\in\tilde{J}. \qquad \square \tag{5}$$

Remarque 2. Lorsque $p=1$, $a_{1,1}\equiv 1$ et les autres coefficients sont nuls, nous retrouvons la base de Schauder. Dans ce cas X sera le pont brownien.

Remarque 3. Soit $\alpha\in(0,1)$. Le Théorème 1 permet de construire une base d'ondelettes $\{\Lambda^\alpha_{i,j};\ (i,j)\in\tilde{J}\}$ à support dans les cellules dyadiques $\bar{\Delta}^\alpha_j$ avec

$$\Delta^\alpha_* = \Delta_*, \qquad \Delta^\alpha_0 = (0,\alpha), \qquad \Delta^\alpha_1 = (\alpha,1), \ldots,$$

$\Delta^\alpha_{j\varepsilon}$ s'obtenant à partir de Δ^α_j par le procédé habituel.

1.4. *Conséquences stochastiques*

Soit $\{\varphi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ une base orthonormée de $H_{a,0}$. D'après le théorème de Mercer cité dans Neveu (1968) il existe une suite i.i.d. de v.a.r. gaussiennes normales $\{\xi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ telles que $X=\sum_n \varphi_n\xi_n$ $\mathbb{P}$-p.s. et dans $L^2(\Omega)$.

Nous pouvons donc définir $\mathcal{A}(X,g)$ par

$$\mathcal{A}(X,g)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}\left(\sum_{k\leq n}\varphi_k\xi_k,\ g\right) \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Théorème 1.4. *Sous l'hypothèse* H_A *nous avons*

$$X(x)=\sum_{(i,j)\in\tilde{J}}\Lambda_{i,j}(x)\mathcal{A}(X,\Lambda_{i,j}) \quad \textit{dans } C^{p-1} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \tag{6}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que la série dérivée d'ordre $p-1$ converge uniformément $\mathbb{P}$-p.s. Grâce à (4) nous avons $|D^{p-1}\Lambda_{i,j}|_\infty \simeq 2^{-|j|/2}$, et la démonstration se ramène à celle originelle de Lévy, voir Neveu (1968). □

Maintenant le résultat suivant établit un lien étroit entre l'analyse multi-échelle et la propriété de Markov germe.

Théorème 1.5. *Soit X un processus gaussien centré à trajectoires C^{p-1} défini sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Il y a alors équivalence entre les deux propriétés suivantes:*

(i) *X possède la propriété de Markov d'ordre p.*

(ii) $\forall u\in(0,1)$, $\exists\{\Lambda^u_{i,j};\ (i,j)\in\tilde{J}\}$, *b.o.n. de H_X vérifiant la propriété de localisation du Théorème* 1.4, $\exists\{\xi^u_{i,j}:\ (i,j)\in\tilde{J}\}$, *b.o.n. de $\mathcal{H}_X$ telles que*

$$X(x)=\sum_{(i,j)\in\tilde{J}}\Lambda^u_{i,j}(x)\xi^u_{i,j} \quad \textit{dans } L^2(0,1), \quad \mathbb{P}\textit{-p.s.} \qquad \square \tag{7}$$

Ce théorème illustre le résultat de Pitt qui relie la markovianité du processus X à la propriété pour son espace autoreproduisant d'être local.

La seconde application de l'analyse multi-échelle du procesus X nécessite quelques notations. Soit a une fonction de $L^\infty(0,1)$ et E un borélien de $(0,1)$. Posons:

$$\underline{a}(E)=\operatorname{ess\,inf}\{a(x);\ x\in E\},$$

$$\bar{a}(E)=\operatorname{ess\,sup}\{a(x);\ x\in E\},$$

$$\underline{\bar{a}}(E)=\inf_{F\subset E}\bar{a}(F).$$

Lorsque $E=(0,1)$ nous simplifierons ces notations en $\underline{a}$, $\bar{a}$, $\bar{\underline{a}}$. Soit maintenant $y\in(0,1)$. Nous écrirons

$$x \xrightarrow{+} y \quad \text{si } x\to y \text{ et } x>y \quad \text{et} \quad x \xrightarrow{-} y \quad \text{si } x\to y \text{ et } x<y.$$

Nous posons alors

$$\underline{a}^+(y)=\lim_{x\xrightarrow{+}y} \underline{a}([y,x]), \qquad \underline{a}^-(y)=\lim_{x\xrightarrow{-}y} \underline{a}([x,y]),$$

et définissons de même $\bar{\underline{a}}^+(y)$ et $\bar{\underline{a}}^-(y)$.

Nous aurons besoin des abrévations suivantes: L désigne le logarithme de base 2, log le logarithme népérien. L'expression LLx désigne le nombre $L(L(x))$.

Si a_{pp} est le coefficient du terme de plus haut degré de la forme $\mathscr{A}$, nous aurons:

Théorème 1.6. *Sous l'hypothèse* H_A,

$$\sqrt{\frac{2\log 2}{\bar{\underline{a}}_{pp}}}\leqslant \limsup_{|x-y|\to 0}\frac{|D^{p-1}X(x)-D^{p-1}X(y)|}{\sqrt{|x-y|L|x-y|^{-1}}}\leqslant\sqrt{\frac{2\log 2}{\underline{a}_{pp}}}\quad \mathbb{P}\text{-}p.s., \tag{8}$$

$$\forall y\in(0,1),\quad \sqrt{\frac{2\log 2}{\bar{\underline{a}}^{\pm}_{pp}(y)}}\leqslant \limsup_{|x-y|\xrightarrow{\pm}0}\frac{|D^{p-1}X(x)-D^{p-1}X(y)|}{\sqrt{|x-y|LL|x-y|^{-1}}}$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{2\log 2}{\underline{a}^{\pm}_{pp}(y)}}\quad \mathbb{P}\text{-}p.s. \tag{9}$$

Si y est un point de Lebesgue de la fonction $1/a_{pp}$,

$$\limsup_{|x-y|\xrightarrow{\pm}0}\frac{|D^{p-1}X(x)-D^{p-1}X(y)|}{\sqrt{|x-y|LL|x-y|^{-1}}}=\sqrt{\frac{2\log 2}{a_{pp}(y)}}\quad \mathbb{P}\text{-}p.s.\qquad \square \tag{10}$$

Remarque 4. Si la fonction a_{pp} est continue nous avons les égalités

$$\underline{a}_{pp}=\bar{\underline{a}}_{pp}=\bar{a}_{pp},\qquad \bar{\underline{a}}^{\pm}_{pp}(y)=a_{pp}(y)\quad \forall y\in(0,1)$$

Si la fonction a_{pp} est continue par morceaux, l'inégalité (9) met en évidence les points de discontinuité.

En général pour obtenir la fonction module ϕ d'un processus gaussien centré X, ici $\phi(h)=\sqrt{hLh^{-1}}$, on est amené à faire l'hypothèse de stationnarité des accroissements de X, comme dans Marcus et Schepp (1971). Dans notre situation la propriété de Markov la remplace avantageusement, puisque nous obtenons les constantes optimales d'encadrement dans (8).

2. Analyse multi-échelle de l'espace de l'énergie d'une forme de Dirichlet symétrique d'ordre $2p$ sur $(0,1)$

Soit $\mathscr{A}$ une forme de Dirichlet d'ordre $2p$ et de coefficients $a_{\alpha\beta}$ avec $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant p$.

A la forme $\mathscr{A}$ est associée l'opérateur A formellement défini par

$$A = \sum_{0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p} (-1)^{\alpha} D^{\alpha}[a_{\alpha\beta}(\cdot) D^{\beta}]. \tag{11}$$

Nous conservons les notations de la première partie.

2.1. *L'opérateur A*

Supposons que les coefficients de la forme $\mathscr{A}$ vérifient l'hypothèse H_A. Nous avons, outre la constante γ de H_A, une contante Γ telle que $0 \leqslant \gamma \leqslant \Gamma$ et

$$\gamma |h|^2_{H_0^p} \leqslant \mathscr{A}(h, h) \leqslant \Gamma |h|^2_{H_0^p} \quad \forall h \in \mathscr{D}(0, 1). \tag{12}$$

Si H'_a désigne l'espace dual de $H_{a,0}$ le théorème de Riesz assure l'existence d'un opérateur A de $H_{a,0}$ dans H'_a tel que

$$\mathscr{A}(\varphi, \psi) = \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(0, 1),$$

où $\langle\, , \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H_{a,0}$ et H'_a.

Le théorème de Lax-Milgram nous permet de déduire de (12) que A admet un inverse continu. Cet inverse, noté A^{-1}, a pour noyau la fonction de Green de A sur $(0, 1)$, notée $G(x, y)$. Au sens des distributions nous avons alors

$$\begin{aligned} &\forall y \in (0, 1), \quad AG(., y) = \delta(\cdot - y) \quad \text{sur } (0, 1), \\ &\qquad\qquad G(., y) \in H_0^p(0, 1). \end{aligned} \tag{13}$$

Notons que (13) définit G de manière unique. Maintenant passons à la démonstration du Théorème 1.3.

2.2. *Base d'ondelettes de $H_{a,0}$*

Soit J l'ensemble des mots dyadiques de longueur finie. Pour $j \in J$, Δ_j désigne la cellule dyadique $(x(j), x(j) + 2^{-|j|})$ avec

$$\begin{aligned} &x(*) = 0, \quad \text{si } |j| = 0, \\ &x(j) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant |j|} j_k 2^{-k}, \quad \text{si } |j| \geqslant 1 \text{ et } j = j_1 j_2 \cdots j_{|j|}. \end{aligned}$$

Par la notation j^+ nous désignons le mot dyadique $j = j_1 j_2 \cdots j_{|j|} 1$. On remarque alors que $x(j^+)$ est le milieu de Δ_j.

Avec ces notations nous définissons les pré-ondelettes ϕ_{ij}, $(i, j) \in \tilde{J}$ par

$$\begin{aligned} &A\phi_{ij} = c_{ij}(-1)^{i-1} D^{i-1} \delta_{x(j^+)} \quad \text{sur } \Delta_j, \\ &\phi_{ij} \in H_0^p(\Delta_j), \\ &\mathscr{A}(\phi_{ij}, \phi_{ij}) = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Puisque $D^k \delta \in H^{-p}(0, 1)$ si $0 \leqslant k < p$, (14) définit ϕ_{ij} de manière unique. La constante c_{ij} de la première ligne étant choisie pour assurer la normalisation de la troisième ligne.

Nous démontrerons d'abord le Théorème 1.3 dans le cas particulier où

$$A=(-1)^p D^{2p} =: A_0,$$

puis nous y ramènerons le cas général.

2.2.1. Cas 1: $A=A_0$

On vérifie facilement que

$$\phi_{ij}(x)=2^{-(p-1/2)|j|}\phi_{i*}(2^{|j|}(x-x(j))), \quad (i,j)\in \tilde{J}. \tag{15}$$

Nous avons alors les propriétés suivantes:

(C1) De (15) nous obtenons (4) pour les pré-ondelettes avec les constantes

$$c=\min_{i=1,\dots,p;\, m=0,\dots,p-1} |D^m\phi_{i*}|_\infty, \qquad C=\max_{i=1,\dots,p;\, m=0,\dots,p-1} |D^m\phi_{i*}|_\infty.$$

(C2) Dans le cas présent les fonctions ϕ_{i*} sont polynômiales sur Δ_0 et sur Δ_1. Si M_p est défini par

$$M_p=\max_{i=1,\dots,p;\varepsilon=0,1}\ \sup_{x\in\Delta_\varepsilon} |D^p\phi_{i*}(x)|$$

nous avons alors

$$|D^{p-1}\phi_{i*}(x)-D^{p-1}\phi_{i*}(y)|\leq M_p|x-y|, \quad i=1,\dots,p,$$

ce qui conduit à (5) par le changement d'échelle $x\mapsto x'=2^{|j|}(x-x(j))$.

(C3) Supposons $j\neq l$, $1\leq i, k\leq p$.

Si $\Delta_j\cap\Delta_l=\emptyset$ nous avons trivialement

$$\mathscr{A}(\phi_{ij},\phi_{kl})=0.$$

Quand $\Delta_j\subset\Delta_l$ par des intégrations par parties nous obtenons

$$\mathscr{A}(\phi_{ij},\phi_{kl})=(-1)^{k-1}D^{k-1}\phi_{ij}(x(l^+))=0.$$

Soit H_j le sous-espace de $H_0^p(0,1)$ engendré par $\phi_{1j},\dots,\phi_{pj}$. Nous venons de montrer l'orthogonalité des H_j deux à deux.

Soit alors $\phi\in H_0^p\backslash(\bigoplus_{j\in J} H_j)$. Il vient facilement

$$\mathscr{A}(\phi,\phi_{kj})=(-1)^{k-1}D^{k-1}\phi(x(j))=0 \quad \forall (k,j)\in\tilde{J}.$$

D'autre part, d'après le lemme d'injection de Sobolev nous avons $H_0^p(0,1)\subset C^{p-1}[0,1]$. Nous obtenons donc $\phi\equiv 0$. Ainsi

$$H_0^p(0,1)=\bigoplus_{j\in J} H_j. \tag{16}$$

(C4) Il ne nous reste plus qu'à construire la base d'ondelettes cherchée. Pour cela nous orthonormalisons $(\phi_{i*},\ i=1,\dots,p)$. Nous obtenons une b.o.n. $(\Lambda_{i*},\ i=1,\dots,p)$ de H_*. Puis nous posons

$$\Lambda_{ij} := 2^{-(p-1/2)|j|}\Lambda_{i*}(2^{|j|}(\cdot-x(j))), \quad (i,j)\in\tilde{J}. \tag{17}$$

Les points (C1), ..., (C4) démontrent le Théorème 1.3 dans le cas où $A=A_0$.

2.2.2. Cas 2: $A=(-1)^p D^p(aD^p)$

Pour démontrer le Théorème 1.3 dans ce cas, nous comparerons A à un opérateur du type cA_0. Pour cela définissons $a(j)$ par $a(j)=2^{|j|}\int_{\Delta_j} a(x)\,\mathrm{d}x$. Notons alors A_j l'opérateur $a(j)A_0$. Convenons de noter encore A l'opérateur de $H_{a,0}(\Delta_j)$ dans $H'_{a,0}(\Delta_j)$ associé à la restriction de la forme $\mathscr{A}$ à l'intervalle ouvert Δ_j.

Notons ϕ_{ij} les pré-ondelettes associées à A par (15) et $\tilde{\phi}_{ij}$ celles définies par

$$A_j\tilde{\phi}_{ij}=c_{ij}(-1)^{i-1}D^{i-1}\delta_{x(j_+)}\quad \text{sur } \Delta_j,\qquad \tilde{\phi}_{ij}\in H_0^p(\Delta_j).$$

La démonstration de la propriété (4) ne dépend pas de la régularité de la fonction a. En supposant a régulière elle consiste à montrer que $|\phi_{ij}-\tilde{\phi}_{ij}|_p \simeq 2^{-|j|/2}$, puisqu'alors nous aurons par le lemme d'injection de Sobolev: $|D^{p-1}(\phi_{ij}-\tilde{\phi}_{ij})|_\infty \simeq 2^{-|j|/2}$. Comme nous savons déjà que $|D^{p-1}\tilde{\phi}_{ij}|_\infty \simeq 2^{-|j|/2}$, nous obtenons $|D^{p-1}\phi_{ij}|_\infty \simeq 2^{-|j|/2}$, puis par intégration les inégalités (4) pour les ϕ_{ij}.

Montrons donc

$$|\phi_{ij}-\tilde{\phi}_{ij}|_p \simeq 2^{-|j|/2}. \tag{18}$$

De l'égalité $A\phi_{ij}=A_j\tilde{\phi}_{ij}$ nous tirons

$$A(\phi_{ij}-\tilde{\phi}_{ij})=(A_j-A)\tilde{\phi}_{ij} \tag{19}$$

d'où, $\forall \varphi\in\mathscr{D}(0,1)$,

$$\langle A(\phi_{ij}-\tilde{\phi}_{ij}),\,\varphi\rangle=\langle (A_j-A)\tilde{\phi}_{ij},\,\varphi\rangle.$$

Puis en élevant au carré

$$\begin{aligned}\langle A(\phi_{ij}-\tilde{\phi}_{ij}),\,\varphi\rangle^2&=\langle (A_j-A)\tilde{\phi}_{ij},\,\varphi\rangle^2\\&\leqslant \sum_{l\in\tilde{J}}\left(\int_0^1 (a_j-a)D^p\tilde{\phi}_{il}D^p\varphi\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant K\int_{\Delta_j}(a_j-a)^2(D^p\varphi)^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

où la constante $K>0$ est indépendante de φ.

Ceci puisque $(D^p\tilde{\phi}_{il};\,(i,l)\in\tilde{J})$ est une base de Riesz de $L^2(0,1)$.

Il vient alors

$$\langle A(\phi_{ij}-\tilde{\phi}_{ij}),\,\varphi\rangle^2\leqslant \varepsilon_j 2^{-|j|}\left(\int_0^1 (D^p\varphi)^2\,\mathrm{d}x\right), \tag{20}$$

avec ε_j petit si $|j|$ est grand et puisque $\sum_{|j|=n} a_j 1_{\Delta_j}(x)\to a$ p.p. et L^2. Ce qui nous conduit à (18) et donc à l'estimation (4).

Pour l'estimation (5) reprenons (19). Nous en déduisons que, si G_j est la fonction de Green de A sur Δ_j,

$$\phi_{ij}(x)-\tilde{\phi}_{ij}(x)=\int_{\Delta_j} D_y^p G_j(x,y)(a_j-a(x))D^p\tilde{\phi}_{ij}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Nous avons alors

$$D^p(\phi_{ij}-\tilde{\phi}_{ij})(x)=(a_j-a(x))D^p\tilde{\phi}_{ij}(x)+D^pH_j$$

où H_j est une combinaison de fonctions A_j-harmoniques. Par suite

$$\max_{\varepsilon=0,1} ess \sup_{x\in\Delta_{\varepsilon j}} |D^p(\phi_{ij}-\tilde{\phi}_{ij})(x)|\leq L2^{|j|/2}+|D^pH_j|_\infty$$

avec $L=2C$ ess sup a, où C est la constante de (C1). Comme les fonctions A-harmoniques sont à dérivées d'ordre p dans L^∞, par changement d'échelle nous aurons

$$|D^pH_j|_\infty\leq M2^{|j|/2}.$$

Soit, avec $N=L+M$,

$$|D^{p-1}\phi_{ij}(x)-D^{p-1}\phi_{ij}(y)|\leq(N+C)2^{|j|/2}|x-y|$$

puisque C est constante de Lipschitz de $D^{p-1}\tilde{\phi}_{ij}$. Nous avons donc l'estimation (5). Le reste de la démonstration du Théorème 1.3 est similaire au cas 1: nous avons encore

$$H_0^p(0,1)=\bigoplus_{j\in J} H_j$$

pour la forme $\mathscr{A}$, et il suffit d'orthonormaliser chaque famille $(\phi_{ij},\ i=1,\ldots,p)$ pour obtenir la base cherchée (Λ_{ij}). On peut le faire en utilisant la matrice de Gram des ϕ_{ij}, ce qui donne immédiatement les propriétés du Théorème 1.3.

2.2.3. Cas 3: cas général

Posons ici $\tilde{A}=(-1)^pD^p(aD^p)$. Alors

$$A=\tilde{A}+\sum_{\alpha,\beta<p}(-1)^\alpha D^\alpha(a_{\alpha,\beta}D^\beta)=:\tilde{A}+B.$$

Les préondelettes $\tilde{\phi}_{ij}$ sont celles du Cas 2, associées à l'opérateur $\tilde{A}$ et les préondelettes ϕ_{ij} sont celles associées à l'opérateur A par (14). Nous avons

$$A(\phi_{ij}-\tilde{\phi}_{ij})=-B\tilde{\phi}_{ij}=:f_{ij},\quad (i,j)\in\tilde{J}. \tag{21}$$

Soit $G(x,y)$ la fonction de Green de A_0. Il existe une constante K telle que

$$\begin{aligned}(1/K)|f_{ij}|_{-p}^2&\leq\iint G(x,y)f_{ij}(x)f_{ij}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int\sum_{0\leq\beta,\gamma\leq p-1}a_{p\beta}(x)a_{p\gamma}(x)D^\beta\tilde{\phi}_{ij}(x)D^\gamma\tilde{\phi}_{ij}(x)\,\mathrm{d}x\\&\quad+2\iint_{y<x}\sum_{0\leq\beta\leq p,0\leq\gamma<p}a_{p-1\ \beta}(y)a_{p\gamma}(x)D^\beta\tilde{\phi}_{ij}(y)D^\gamma\tilde{\phi}_{ij}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\quad+\int\left(\int_0^x\sum_{0\leq\beta\leq p}a_{p-1\ \beta}(y)D^\beta\tilde{\phi}_{ij}(y)\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x\\&\quad+R_{ij}\\&=:F_1+F_2+F_3+R_{ij}.\end{aligned}$$

Pour F_1 nous avons utilisé la relation

$$\iint G(x, y) D^p\phi(x) D^p\phi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int \phi^2(x)\,\mathrm{d}x + r =: F_1 + r,$$

avec

$$\phi = \sum_{0\leq\beta\leq p-1} a_{p\beta} D^\beta \tilde{\phi}_{ij}.$$

Pour F_2 nous avons écrit

$$\iint G(x, y) D^p\phi(x) D^{p-1}\psi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int \phi I(\psi)\,\mathrm{d}x + s =: F_2 + s,$$

avec maintenant

$$\psi = \sum_{0\leq\beta\leq p} a_{p-1\ \beta} D^\beta \tilde{\phi}_{ij}, \qquad I(\psi)(x) = \int_0^x \psi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Pour F_3 nous avons écrit

$$\iint G(x, y) D^{p-1}\phi(x) D^{p-1}\phi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int I(\phi)^2 + t =: F_3 + t.$$

D'après l'estimation (4) pour $\tilde{\phi}_{ij}$ et puisque les coefficients de la forme $\mathscr{A}$ sont bornés, les quantités r, s, t, R_{ij} sont des quantités négligeables devant F_1, F_2 et F_3. En fait le terme dominant est F_1, puisque les ordres de dérivation des fonctions $\tilde{\phi}_{ij}$ y sont maximum.

Cela nous conduit alors à: $|f_{ij}|_{-p} \simeq 2^{-|j|}$. Nous avons donc démontré (4) dans le cas général.

Il nous reste à montrer (5). Pour cela nous remarquons que

$$\phi_{ij} - \tilde{\phi}_{ij} = \tilde{A}^{-1} B\phi_{ij}$$

et nous utilisons les conclusions des calculs ci-dessus pour écrire

$$D^p\tilde{A}^{-1}B(\phi_{ij} - \tilde{\phi}_{ij}) = \sum_{0\leq\beta\leq p-1} a_{p\ \beta} D^\beta(\phi_{ij} - \tilde{\phi}_{ij}) + r_j,$$

$$D^p\tilde{A}^{-1}B(\tilde{\phi}_{ij}) = \sum_{0\leq\beta\leq p-1} a_{p\ \beta} D^\beta \tilde{\phi}_{ij} + s_j.$$

Puisque $|D^{p-1}(\phi_{ij} - \tilde{\phi}_{ij})|_\infty \simeq 2^{|j|/2}$ et que $|r_j|_\infty = o(2^{|j|/2})$, il existe un réel $K > 0$ tel que

$$|D^p\tilde{A}^{-1}B(\phi_{ij} - \tilde{\phi}_{ij})|_\infty \leq K 2^{|j|/2}.$$

Nous aurons de même

$$|D^p\tilde{A}^{-1}B\tilde{\phi}_{ij}|_\infty \leq K' 2^{|j|/2}.$$

Mais alors la propriété (5) pour $\tilde{\phi}_{ij}$ nous conduira à la propriété (5) pour ϕ_{ij}.

Comme la fin de la démonstration est identique à celle des cas précédents, nous avons obtenu la démonstration du Théorème 1.3 dans le cas général.

2.3. Compléments

Si a est une fonction intégrable pour m la mesure de Lebesgue sur $(0, 1)$, rappelons qu'en notant

$$a_h(x) := \frac{1}{h}\int_x^{x+h} a(y)\,\mathrm{d}y,$$

nous avons la convergence

$$\lim_{h\to 0} a_h = a, \quad \text{dans } L^1 \text{ et } m-\text{p.p.},$$

et que de plus, si $x \in (0, 1)$ est un point de Lebesgue de la fonction a,

$$\lim_{h\to 0} a_h(x) = a(x).$$

Proposition 2.1. *Sous l'hypothèse* H_A *nous avons les limites suivantes*:

(i) *Si x est un point de* $(0, 1)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{a}^{\pm}_{pp}(x)} &\leq \limsup_{h\to 0^{\pm}} \frac{1}{h} \sum_{(i,j)\in\tilde{J}} (D^{p-1}\Lambda_{ij}(x+h) - D^{p-1}\Lambda_{ij}(x))^2 \\ &\leq \frac{1}{\underline{a}^{\pm}_{pp}(x)}.\end{aligned} \tag{22}$$

(ii) *Si de plus x est un point de Lebesgue de la fonction* $1/a_{pp}$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{(i,j)\in\tilde{J}} (D^{p-1}\Lambda_{ij}(x+h) - D^{p-1}\Lambda_{ij}(x))^2 = \frac{1}{a_{pp}(x)}. \tag{23}$$

Démonstration. Soient Λ_{ij} et $\hat{\Lambda}_{ij}$, $(i, j) \in \tilde{J}$ les bases d'ondelettes associées aux opérateurs A et $\tilde{A} := (-1)^p D^p(a_{pp}D^p)$ respectivement. Nous venons de montrer que $|D^{p-1}\Lambda_{ij} - D^{p-1}\tilde{\Lambda}_{ij}|_\infty \simeq 2^{-|j|/2}$ et donc que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{(i,j)\in\tilde{J}} (D^{p-1}(\Lambda_{ij} - \tilde{\Lambda}_{ij})(x+h) - D^{p-1}(\Lambda_{ij} - \tilde{\Lambda}_{ij})(x))^2 = 0,$$

et cela uniformément en x. Nous pouvons donc nous restreindre au cas où $A = \tilde{A}$. Notons alors F l'espace des fonctions A-harmoniques. L'espace F est de dimension $2p$ et contient les polynômes $x^0, \ldots, x^{p-1}$ qui sont isotropes. Notons $f_1, \ldots, f_p$ p éléments de F non isotopes et orthonormés dans $L^2(0, 1)$. Dans ces conditions la famille $(\sqrt{a_{pp}}\, D^{p-1}\Lambda_{ij},\ (i, j) \in \tilde{J},\ f_1, \ldots, f_p)$ constitue une base orthonormée de $L^2(0, 1)$. En décomposant la fonction $1_{(x,x+h)}(y)a_{pp}^{-1}(y)$ sur cette base il vient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\int_x^{x+h} a_{pp}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad= \frac{1}{h} \sum_{(i,j)\in\tilde{J}} (D^{p-1}\Lambda_{ij}(x+h) - D^{p-1}\Lambda_{ij}(x))^2 \\ &\qquad+ \frac{1}{h} \sum_{q=1,\ldots,p} \left(\int_x^{x+h} f_q(y) a_{pp}^{-1/2}(y)\,\mathrm{d}y\right)^2.\end{aligned}$$

La proposition découle de la propriété $a_{pp}^{-1} \in L^1(0,1)$. □

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.3, *nous avons si* $0<\beta<1$ *et si* x *est point de Lebesgue de la fonction* $1/a_{pp}$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{||j|-Lh^{-1}|<\beta LLh^{-1}} (D^{p-1}\Lambda_{ij}(x+h)-D^{p-1}\Lambda_{ij}(x))^2 = \frac{1}{a_{pp}(x)}. \tag{24}$$

Démonstration. Compte tenu de la proposition précédente il suffit de montrer la convergence vers 0 dans L^1 des quantités $S^{\pm}(x,h)$ définies par

$$\frac{1}{h} \sum_{|j|>Lh^{-1}+\beta LLh^{-1}} (D^{p-1}\Lambda_{ij}(x+h)-D^{p-1}\Lambda_{ij}(x))^2, \tag{25}$$

$$\frac{1}{h} \sum_{|j|<Lh^{-1}-\beta LLh^{-1}} (D^{p-1}\Lambda_{ij}(x+h)-D^{p-1}\Lambda_{ij}(x))^2. \tag{26}$$

D'après le Théorème 1.3 nous avons

$$|D^{p-1}\Lambda_{ij}(x)|_\infty \le C2^{-|j|/2},$$

$$|D^{p-1}\Lambda_{ij}(y)-D^{p-1}\Lambda_{ij}(x)| \le K2^{|j|/2}|y-x|.$$

D'où les majorations suivantes

$$S^+(x,h) \le 2pC^2h^{-1} \sum_{q>Lh^{-1}+\beta LLh^{-1}} 2^{-q} \le 2pC^2 2^{-\beta LLh^{-1}} = C'(Lh^{-1})^{-\beta},$$

$$S^-(x,h) \le 2pK^2h^{-1} \sum_{q<Lh^{-1}+\beta LLh^{-1}} 2^q h^2 \le K'(Lh^{-1})^{-\beta}.$$

Si l'on fait tendre h vers 0 les quantités $S^+(x,h)$, $S^-(x,h)$ tendent uniformément en x vers 0, ce qui démontre le corollaire. □

3. Analyse multi-échelle et propriété de Markov germe

Dans cette partie nous établissons le lien étroit entre analyse multi-échelle et propriété de Markov germe, énoncé dans le Théorème 1.5. Démontrons d'abord l'implication (ii)⇒(i).

Soit $\{\xi^u_{i,j};\ (i,j)\in \tilde{J}\}$ la famille indépendante de v.a.r. gaussiennes normales correspondant par l'isométrie canonique à la base $\{\Lambda^u_{i,j};\ (i,j)\in\tilde{J}\}$ de H_X.

Puisque

$$\mathscr{F}_u = \sigma\{\xi^u_{i,*};\ i=1,\dots,p\}, \qquad \mathscr{F}_{(0,u)} = \sigma\{\xi^u_{i,0j};\ (i,j)\in\tilde{J}\},$$

$$\mathscr{F}_{(u,1)} = \sigma\{\xi^u_{i,1j};\ (i,j)\in\tilde{J}\},$$

nous avons facilement l'indépendance conditionnelle de $\mathscr{F}_{(0,u)}$ et $\mathscr{F}_{(u,1)}$ sachant $\mathscr{F}_u$. C'est le résultat cherché.

Passons maintenant à la réciproque. Comme $X \in C^{p-1}$ $\mathbb{P}$-p.s., posons successivement

$$Z_k^u := D^{k-1}X(u), \quad k=1,\dots,p,$$

$$G_u := \text{ la matrice de covariance du vecteur } (Z_1^u,\dots,Z_p^u).$$

Dans ce cas,

$$\xi_k^u := G_u^{-1/2}(Z_k^u), \quad k=1,\dots,p,$$

est une famille o.n. de $\mathscr{H}_X$ et nous noterons $(\Lambda_k^u;\ k=1,\dots,p)$ la famille o.n. de H_X qui lui correspond. Nous définissons alors les processus X_*, R_0, R_1 par

$$X_*(x) = \sum_{k=1,\dots,p} \Lambda_k^u(x)\xi_k^u,$$

$$R_\varepsilon = X(x) - X_*(x) \quad \text{sur } \Delta_\varepsilon^u,\ \varepsilon = 0, 1.$$

Comme nous avons

$$X_* = \mathbb{E}(X \mid \xi_k^u, k=1,\dots,p) \quad \mathbb{P}\text{-p.s. sur } \Delta_\varepsilon$$

il est loisible de recommencer l'opération et de décomposer de manière similaire les sommes R_1, R_0 sur Δ_1^u et Δ_0^u respectivement.

A l'étape n nous aurons défini les processus X_j^u, $|j| \leq n$ tels que

$$X_j^u(x) = \sum_{k=1,\dots,p} \Lambda_{k,j}^u(x)\xi_{k,j}^u$$

où $(\Lambda_{k,j}^u)$, $(\xi_{k,j}^u)$ sont des familles o.n. de H_X et $\mathscr{H}_X$ respectivement.

Posons maintenant

$$\mathscr{F}_n = \sigma\{\xi_{i,j}^u;\ i=1,\dots,p \,|\, |j| \leq n\}, \qquad X_n(x) = \sum_{k=1,\dots,p \,|\, |j| \leq n} \Lambda_{k,j}^u(x)\xi_{k,j}^u.$$

Nous avons alors

$$X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n) \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Si $\tilde{\mathscr{F}}$ désigne la tribu $\bigvee_n \mathscr{F}_n$, en prouvant que $\tilde{\mathscr{F}} = \sigma\{X(x), x \in (0,1)\}$ aux ensembles négligeables près, nous aurons

$$X_n \to X \quad \text{dans } L^2(\Omega, \mathbb{P}) \text{ et } \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

d'où l'implication (i)$\Rightarrow$(ii).

Pour prouver $\tilde{\mathscr{F}} = \sigma\{X(x), x \in (0,1)\}$ il suffit de montrer que la famille $\{\Lambda_{i,j}^u;\ (i,j) \in \tilde{J}\}$ est totale dans H_X. Soit donc φ un élément de H_X orthogonal à tous les $\Lambda_{i,j}^u$; $(i,j) \in \tilde{J}$. Nous avons alors

$$D^k\varphi(x(j)) = 0 \quad \forall (k,j) \in \tilde{J}$$

et par suite $\varphi \equiv 0$ dans C^{p-1}. Mais comme $H_X \subset C^{p-1}$ nous avons aussi $\varphi \equiv 0$ dans H_X, ce qui achève la démonstration.

4. Régularité des trajectoires des processus gaussiens markoviens d'ordre p

Dans cette partie nous établisson les lois du module uniforme et du logarithme itéré pour les processus gaussiens markoviens d'ordre p. Nous reprenons les notations de la première partie, où ces lois sont énoncées. Nous utiliserons les estimations classiques suivantes.

Soit ξ une variable aléatoire normale, alors

$$(1-1/x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \leq \mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}, \quad x>0. \tag{27}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, si χ_n suit une loi du χ^2 à n dimensions, alors

$$\mathbb{P}(\chi_n \geq \lambda n) \leq e^{n(1-\lambda+\log(\lambda))/2}, \quad \lambda > 1, \tag{28}$$

$$\mathbb{P}(\chi_n \geq u^2) \leq u^n \, e^{-u^2/2}, \quad u>2. \tag{29}$$

Soit $\{\xi_j;\, j \in J\}$ une famille indépendante de v.a.r. normales, alors

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{|j|=n} \frac{|\xi_j|}{\sqrt{2n}} = 1 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \tag{30}$$

L'estimation (27) est bien connue. Les estimations (28), (29) se déduisent facilement de l'expression connue de la fonction de répartition de la loi du χ^2, voir Lancaster (1969). Quant à (30), on peut trouver ce résultat classique dans Neveu (1968).

Les coefficients de la forme de Dirichlet $\mathscr{A}$ sont supposés vérifier l'hypothèse H_A. Soit X le processus gaussien centré d'espace autoreproduisant $H_{a,0}$. Soit $(\Lambda_{i,j};\, (i,j) \in \tilde{J})$ la base d'ondelettes fournie par le Théorème 1.3, et soit $(\xi_{i,j};\, (i,j) \in \tilde{J})$ la base de $\mathscr{H}_X$ correspondante, telle que

$$X(x) = \sum_{(i,j)\in\tilde{J}} \Lambda_{i,j}(x)\xi_{i,j} \quad \text{dans } C^{p-1} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

comme l'indique le Théorème 1.4.

4.1. Loi du module uniforme

4.1.1. Donnons nous $\beta \in (0,1)$ puis écrivons

$$D^{p-1}X(x+h) - D^{p-1}X(x) = \Delta_1(x,h) + \Delta_2(x,h) + \Delta_3(x,h), \tag{31}$$

$$\Delta_k(x,h) = \sum_{i=1,\dots,p;\, j\in J_{k,h}} (D^{p-1}\Lambda_{i,j}(x+h) - D^{p-1}\Lambda_{i,j}(x))\xi_{i,j}, \tag{32}$$

avec

$$J_{1,h} = \{j \in J : |j| < Lh^{-1} - \beta LLh^{-1}\}$$

$$J_{2,h} = \{j \in J : Lh^{-1} - \beta LLh^{-1} \leq |j| \leq Lh^{-1} + \beta LLh^{-1}\},$$

$$J_{3,h} = \{j \in J : |j| > Lh^{-1} + \beta LLh^{-1}\}.$$

La démonstration de la loi du module uniforme reviendra à montrer que seul $\Delta_2(x,h)$ n'est pas négligeable devant $\sqrt{hLh^{-1}}$.

Lemme 4.1. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.6 *nous avons, pour* $i=1$ *ou* 3,

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{0<x<1-h, 2^{-n-1}<h\leq 2^{-n}} \frac{\Delta_i(x,h)}{\sqrt{hLh^{-1}}}=0 \quad \mathbb{P}\text{-}p.s. \tag{33}$$

Démonstration. Pour $i=1$, si $n\in\mathbb{N}$, $2^{-n-1}<h\leq 2^{-n}$, notons $J^n_{x,h}$ le sous-ensemble de J défini par

$$J^n_{x,h}=\{j\in J\colon |j|\leq n \text{ et } \Delta_j\ni x, x+h\}.$$

Alors grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à la propriété (5) des ondelettes il vient

$$|\Delta_1(x,h)|^2\leq\left\{\sum_{i=1,\dots,p;\, j\in J_{k,h}} (D^{p-1}\Lambda_{i,j}(x+h)-D^{p-1}\Lambda_{i,j}(x))^2\right\}$$
$$\times\left\{\sum_{i=1,\dots,p;\, j\in J^n_{x,h}} \xi^2_{i,j}\right\},$$

$$|\Delta_1(x,h)|^2\leq Kh^2\left(\sum_{0\leq r\leq n-\beta Ln} 2^r\right)\left\{\sup_{x,x+h\in(0,1)} \sum_{i=1,\dots,p;\, j\in J^n_{x,h}} \xi^2_{i,j}\right\}.$$

Maintenant remarquons que lorsque $x\in\Delta_j$ et $|j|=[n-\beta Ln]$ la somme $\sum_{i=1,\dots,p;\, j\in J^n_{x,h}} \xi^2_{i,j}$ est constante en x, et que ces sommes sont au nombre de $[n-\beta Ln]$. Posons

$$M_n=\left(\sup_{x,x+h\in(0,1)} \sum_{i=1,\dots,p;\, j\in J^n_{x,h}} \xi^2_{i,j}\right)^{1/2}.$$

L'estimation (28) conduit à

$$\mathbb{P}(M_n>\sqrt{\lambda n})\leq 2^{n-\beta Ln}\, \mathrm{e}^{n/2(-\lambda+1+\log(\lambda))}.$$

Ainsi quand $\lambda>4$ nous avons

$$\sum_n \mathbb{P}(M_n>\sqrt{\lambda n})<\infty.$$

Le lemme de Borel-Cantelli assure alors l'existence d'un entier $Q(\omega)$ à partir duquel $M_n<\sqrt{\lambda n}$ $\mathbb{P}$-p.s.

Il s'ensuit, que pour $|x-y|\leq h$, $Lh^{-1}-\beta LLh^{-1}\geq Q(\omega)$, nous avons $\mathbb{P}$-p.s.

$$\frac{|\Delta_1(x,h)|}{\sqrt{hLh^{-1}}}\leq 2\sqrt{K}\,\frac{\sqrt{phLh^{-1}}(Lh^{-1})^{-\beta/2}}{\sqrt{hLh^{-1}}}$$

d'où

$$\frac{|\Delta_i(x,h)|}{\sqrt{hLh^{-1}}}\leq 2\sqrt{Kp}\,(Lh^{-1})^{-\beta/2}$$

ce qui prouve (33) quand $i=1$.

Démonstration quand $i=3$. Remarquons que pour $2^{-n-1}<h\leqslant 2^{-n}$, x et $x+h$ sont dans des cellules dyadiques distinctes à partir de la génération $[n+\beta Ln]$. Il suffit donc d'examiner le comportement des sommes

$$\delta_n^i(x):=\sum_{|j|\geqslant n+\beta Ln} D^{p-1}\Lambda_{i,j}(x)\xi_{i,j}.$$

En utilisant maintenant la propriété 4.30 il vient, pour $n\geqslant N(\omega)$,

$$|\delta_n^i(x)|\leqslant \sum_{r>n+\beta Ln} 2^{-r/2}r^{1/2}\leqslant\sqrt{2}\, I(n+\beta Ln)$$

où $I(y)$ est l'intégrale $\int_y^\infty \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x$. Pour calculer $I(x)$ on fait le changement de variable $x=u^2/\log 2$ et on intègre par parties. Il vient

$$I(x)=(2/\log 2)^{3/2}\left(\sqrt{x2^{-x}\log 2}+\int_{\sqrt{x\log 2}}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u\right).$$

Il existe donc une constante $L>0$ telle que, si $0<h<2^{-N(\omega)}$,

$$\frac{|\delta_n^i(x)|}{\sqrt{hLh^{-1}}}\leqslant K\frac{(Lh^{-1}+\beta LLh^{-1})^{1/2}h^{1/2}(Lh^{-1})^{-\beta/2}}{\sqrt{hLh^{-1}}},$$

$$\frac{|\delta_n^i(x)|}{\sqrt{hLh^{-1}}}\leqslant K\sqrt{2}\,(Lh^{-1})^{-\beta/2}.$$

Nous avons donc prouvé le résultat pour $i=3$. □

4.1.2. Majoration de la limite supérieure

Remarquons que les variables aléatoires $\Delta_2(x,h)$, $\Delta_2(y,h)$ sond indépendantes si $|x-y|>2^{-n-\beta Ln+1}$ et $h<2^{-n}$. Soit n un entier fixé pour le moment et soit j tel que $|j|=[n-\beta Ln]$.

Posons

$$\mu_j:=\sup_{x\in\Delta_j,2^{-n-1}<h\leqslant 2^{-n}} h^{-1/2}\Delta_2(x,h).$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du Corollaire 1, nous obtenons

$$\Delta_2(x,h)\leqslant\left(\int_x^{x+h}\frac{1}{a_{pp}(y)}\,\mathrm{d}y+\mathrm{O}(h^2)\right)^{1/2}\left(\sum_I \xi_{i,l}^2\right)^{1/2}.$$

avec pour ensemble d'indices

$$I:=\{(i,l)\colon n-\beta Ln\leqslant|l|\leqslant n+\beta Ln;\ \Delta_l\ni x;\ i=1,\ldots,p\}.$$

Pour alléger l'écriture posons $\chi^2_{n,\beta}(x):=\sum_I \xi^2_{i,l}$.

Remarquons que $\chi^2_{n,\beta}(x)$ est constante sur tout Δ_j tel que $|j|=[n-\beta Ln]$. La dimension de $\chi^2_{n,\beta}(x)$ étant inférieure à $n^{2\beta}$, l'estimation (28) conduit à

$$\mathbb{P}(\mu_j>\lambda\sqrt{n})\leqslant(\lambda\sqrt{n\bar{a}_j})^{n^{2\beta}}\,\mathrm{e}^{-n\underline{a}_j\lambda^2/2}=:r_j$$

avec $\bar{a}_j:=\bar{a}(\Delta_j)$ et $\underline{a}_j:=\underline{a}(\Delta_j)$.

Puisque les variables aléatoires μ_j sont indépendantes quand $|j| = [n - \beta Ln]$, il vient

$$\mathbb{P}\left(\sup_{|j|=[n-\beta Ln]} \mu_j > \lambda\sqrt{n}\right) \leqslant 1 - \prod_{|j|=[n-\beta Ln]} \mathbb{P}(\mu_j \leqslant \lambda\sqrt{n}),$$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{|j|=[n-\beta Ln]} \mu_j > \lambda\sqrt{n}\right) \leqslant 1 - \prod_{|j|=[n-\beta Ln]} (1 - \mathbb{P}(\mu_j > \lambda\sqrt{n})),$$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{|j|=[n-\beta Ln]} \mu_j > \lambda\sqrt{n}\right) \leqslant 1 - (1 - \tilde{r}_n)^{2^{n-\beta Ln}},$$

avec $\tilde{r}_n := \max_{|j|=[n-\beta Ln]} r_j$.

Mais nous avons

$$\tilde{r}_n \leqslant \lambda\sqrt{n\bar{a}}\, \mathrm{e}^{-n\underline{a}\lambda^2/2} =: r_n.$$

Par suite

$$\mathbb{P}\left(\sup_{|j|=[n-\beta Ln]} \mu_j > \lambda\sqrt{n}\right) \leqslant 1 - (1 - r_n)^{2^{n-\beta Ln}}$$

d'où

$$\mathbb{P}\left(\sup_{|j|=[n-\beta Ln]} \mu_j > \lambda\sqrt{n}\right) \leqslant \exp(n(\log 2 - \underline{a}\lambda^2/2) + \mathrm{O}(n)) =: s_n.$$

Ainsi, sous la condition $\lambda^2 > (2\log 2)/\underline{a}$, la série $\sum s_n$ converge. A nouveau par le lemme de Borel-Cantelli nous aurons un entier aléatoire $N(\omega)$ tel que, sur $\{n \geqslant N(\omega)\}$,

$$\sup_{|j|=[n-\beta Ln]} \mu_j \leqslant \lambda\sqrt{n} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Comme l'encadrement $2^{-n-1} < h \leqslant 2^{-n}$ équivaut à ce que n soit la partie entière de Lh^{-1}, nous obtenons

$$h < 2^{-N(\omega)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta_i(x, h)}{\sqrt{hLh^{-1}}} \leqslant \lambda \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \tag{34}$$

quand x et $x + h$ sont dans la même cellule dyadique de génération $[n - \beta Ln]$. Le cas où x et $x + h$ sont dans des cellules dyadiques contigües se traite de manière similaire.

4.1.3. Minoration de la limite supérieure

Notons Z_x^n la variable aléatoire gaussienne centrée

$$Z_x^n := 2^{n/2}\Delta_2(x, 2^{-n}),$$

et $\sigma_n^2(x)$ sa variance. D'après la démonstration de la Proposition 2.1, nous avons

$$\sigma_n^2(x) = 2^n \int_x^{x+2^{-n}} \frac{1}{a_{pp}(y)}\, \mathrm{d}y + \mathrm{o}(n),$$

et, grâce à l'estimation (26),

$$\mathbb{P}(Z_x^n > \lambda\sqrt{n}) \geqslant \left(\frac{1}{\lambda\sqrt{n}} - \frac{1}{(\lambda\sqrt{n})^3}\right)\frac{\mathrm{e}^{-n\lambda^2/2\sigma_n^2(x)}}{\sqrt{2\pi}}.$$

D'où, $\forall\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(Z_x^n > \lambda\sqrt{n}) \geqslant (1-\varepsilon)\frac{\mathrm{e}^{-n\lambda^2/2\sigma_n^2(x)}}{\lambda\sqrt{2n\pi}},$$

si n est assez grand.

Soit E un ouvert de $(0,1)$, définissons le sous ensemble $J_n(E)$ de J par

$$J_n(E) := \{j \in J : |j| = [n - \beta Ln],\ \Delta_j \subset E\}.$$

Donnons nous pour chaque j un point x_j de Δ_j et posons $Z_j^n := Z_{x_j}^n$. Grâce à l'indépendance déjà observée

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j\in J_n(E)} Z_j^n > \lambda\sqrt{n}\right) = 1 - \prod_{j\in J_n(E)} (1 - \mathbb{P}(Z_x^n > \lambda\sqrt{n})),$$

d'où

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j\in J_n(E)} Z_j^n > \lambda\sqrt{n}\right)$$
$$\geqslant 1 - \prod_{j\in J_n(E)} \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{\lambda\sqrt{2n\pi}} \exp\left(-\frac{n\lambda^2}{2\sigma_n^2(x_j)}\right)\right).$$

Si $|E|$ désigne la mesure de Lebesgue de E il vient $\operatorname{card}(J_n(E)) = [n - \beta Ln]|E|$ et en notant $\bar{\sigma}_n := \min_{j\in J_n(E)} \sigma_n(x)$ on obtient

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j\in J_n(E)} Z_j^n > \lambda\sqrt{n}\right)$$
$$\geqslant 1 - \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{\lambda\sqrt{2n\pi}} \exp\left(-\frac{n\lambda^2}{2\bar{\sigma}_n^2}\right)\right)^{2^{[n-\beta Ln]|E|}}.$$

En notant maintenant

$$b_n := \max_{j\in J_n(E)} \bar{a}_j \geqslant \frac{1}{\min_{j\in J_n(E)} 1/\bar{a}_j} \geqslant \frac{1}{\bar{\sigma}_n^2},$$

et si $\lambda = \mu|E|$ il vient

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j\in J_n(E)} Z_j^n > \mu\sqrt{n|E|}\right)$$
$$\geqslant 1 - \exp\left(-\frac{1-\varepsilon}{\mu\sqrt{2n|E|\pi}\, n^{|E|\beta}} \mathrm{e}^{-n|E|(b_n\mu^2/2) - \log 2}\right) =: s_n.$$

Si $\mu^2 < (\log 2)/(2 \limsup_n b_n)$, la série de terme général s_n diverge. Choisissons alors une suite d'entiers n_k telle que

$$n_{k+1} - \beta L n_k > n_k \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ce qui est toujours possible. Pour un tel choix, les événements

$$\Omega_k := \left\{ \sup_{j \in J_{n_k}(E)} |Z_j^{n_k}| > \mu\sqrt{|E| n_k} \right\}$$

sont indépendants, et le lemme de Borel–Cantelli assure qu'il existe une infinité d'entiers k tels que Ω_k est réalisé. Ceci prouve, quel que soit E ouvert de $(0, 1)$,

$$\limsup_{h \downarrow 0; x \in E} \frac{\Delta_2(x, h)}{\sqrt{hLh^{-1}}} \geqslant \sqrt{\frac{2 \log 2}{\bar{a}_{pp}(E)}}.$$

En définitive nous aurons

$$\limsup_{|x-y| \downarrow 0; x, y \in (0,1)} \frac{\Delta_2(x, |x-y|)}{\sqrt{|x-y| L |x-y|^{-1}}} \geqslant \sqrt{\frac{2 \log 2}{\bar{a}_{pp}}} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \tag{35}$$

avec la notation introduite juste avant le Théorème 1.6.

Mais (34) et (35) nous conduisent au résultat (8).

4.2. Loi du logarithme itéré

4.2.1. La démonstration de la loi du logarithme itéré se fera dans le même esprit que celle du module uniforme. Soit y fixé dans $(0, 1)$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, posons

$$\Delta_n(y) := \{x : |x - y| < 2^{-n}\}.$$

Le nombre de points dyadiques de $\Delta_n(y)$ et de génération $\leqslant n$ est majoré par $2(n+1)^2$, ce qui s'écrit

$$\operatorname{card}\{x(j) \in \Delta_n(y);\ j \in J, |j| \leqslant n\} \leqslant 2(n+1)^2. \tag{36}$$

Maintenant, comme précédemment écrivons

$$D^{p-1}X(y+h) - D^{p-1}X(y) = \Delta_1(h) + \Delta_2(h) + \Delta_3(h),$$

$$\Delta_k(h) = \sum_{i=1,\dots,p;\, j \in J_{k,n}^y} (D^{p-1}\Lambda_{i,j}(x+h) - D^{p-1}\Lambda_{i,j}(x))\xi_{i,j},$$

avec

$$J_{1,h}^y = \{j \in J : |j| < n - \beta LLn,\ x(j) \in \Delta_n(y)\},$$

$$J_{2,h}^y = \{j \in J : n - \beta LLn \leqslant |j| \leqslant n + \beta LLn,\ x(j) \in \Delta_n(y)\},$$

$$J_{3,h}^y = \{j \in J : |j| > n + \beta LLn,\ x(j) \in \Delta_n(y)\}.$$

Lemme 4.2. *Sous* H_A, *nous avons pour* $k = 1$ *et* $k = 3$,

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{\Delta_k(h)}{\sqrt{hLLh^{-1}}} = 0 \quad \mathbb{P}\text{-}p.s. \tag{37}$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du Lemme 4.1.

Si $k=3$, comme pour le Lemme 4.1 nous avons une constante $C>0$ et un entier $N(\omega)$ tel que sur $\{n \geqslant N(\omega)\}$,

$$\begin{aligned} |\Delta_3(h)| &\leqslant C \sum_{r \geqslant n+\beta LLn} 2^{-r/2}\sqrt{Lr} \\ &\leqslant \tilde{C} 2^{-n/2}(LLn)^{-(1+\beta)/2}. \end{aligned} \tag{38}$$

En utilisant l'estimation (30) et le résultat (36) nous déduisons (37) de (38), quand $k=3$.

Si $k=1$, c'est encore la même démonstration que pour le Lemme 4.1 mais maintenant le calcul utilise $J_{1,n}^y$. □

4.2.2. Majoration de la limite supérieure

Pour $n \in \mathbb{N}$ dfinissons la quantité v_n par

$$v_n := \sup_{2^{-n-1}<h\leqslant 2^{-n}} \frac{1}{\sqrt{h}} \left| \sum_{i=1,\dots,p;\, j\in J_{2,n}} (D^{p-1}A_{i,j}(y+h) - D^{p-1}A_{i,j}(y))\xi_{i,j} \right|.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et au Corollaire 3.1,

$$v_n \leqslant \left(\frac{1}{h} \int_y^{y+h} \frac{\mathrm{d}x}{a_{pp}(x)} + \varepsilon_n \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1,\dots,p;\, j\in J_{2,n}} \xi_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé et pour n assez grand, l'estimation (28) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(v_n > \lambda\sqrt{Ln}) &\leqslant (\lambda^2 Ln)^{(Ln)^{2\beta}} \exp - \frac{\lambda^2 Ln}{2(\sigma_n^2+\varepsilon_n)^{1/2}}, \\ &\leqslant \exp(-Ln(\tfrac{1}{2}\lambda^2\sqrt{\underline{a}_{pp}(y, y+2^{-n})} - \varepsilon)) \\ &\leqslant n^{-((\lambda^2/(2\log 2))\sqrt{\underline{a}_{pp}^+(y)} - \varepsilon)} =: r_n. \end{aligned}$$

avec les notations de la partie 1 et $\sigma_n^2 := 2^n \int_y^{y+h} \mathrm{d}y/a_{pp}(y)$.

Maintenant, si $\lambda^2 > (1-\varepsilon)(2\log 2)/\sqrt{\underline{a}_{pp}^+(y)}$, la série de terme général r_n converge et, par le lemme de Borel-Cantelli, nous aurons un entier $N(\omega)$ tel que

$$v_n \leqslant \lambda\sqrt{Ln} \quad \text{sur } n \geqslant N(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Après avoir fait de même avec $-h$ à la place de h nous obtenons la majoration de (9).

4.2.3. Minorations de la limite supérieure

L'argument employé pour minorer la limite supérieure dans le cas du module uniforme peut être repris ici. Nous obtenons alors, avec $b_n := \operatorname{ess\,sup}\{a_{pp}(x),\ x \in (y, y+2^{-n})\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(v_n > \lambda\sqrt{Ln}) &\geqslant 1 - \exp\left(\frac{1-\varepsilon}{\lambda\sqrt{Ln}} \mathrm{e}^{Ln(\log 2 - \lambda^2 b_n/2)} \right), \\ &\geqslant 1 - \exp\left(\frac{1-\varepsilon}{\lambda\sqrt{Ln}} \mathrm{e}^{Ln(\log 2 - \lambda^2 \underline{a}_{pp}^+(y)/2)} \right) =: s_n. \end{aligned}$$

Comme $\sum_n s_n = \infty$ si $\lambda^2 > (2 \log 2)/\sqrt{\underline{a}_{pp}^+(y)}$, nous aurons bien la minoration de (9) avec $h > 0$. Le raisonnement est similaire pour $h < 0$ et ceci termine la démonstration du Théorème 1.6).

4.2.4. Naturellement quand y est point de Lebesgue de $1/a_{pp}$ les calculs précédents démontrent l'égalité (10).

5. Conclusions et perspectives

5.1. Lorsque la forme $\mathscr{A}$ est $\mathscr{A}(f, g) = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx$, le processus régulier X associé à $\mathscr{A}$ est alors le pont brownien. Le Théorème 1.6 donne les lois du module uniforme et du logarithme itéré et la démonstration donnée ci-dessus est nouvelle.

5.2. Soient A_1, A_2 deux opérateurs d'ordre $2p$ du type 2.1. Supposons que leurs coefficients soient de classe C^∞. Soient alors G_1 et G_2 les fonctions de Green respectives sur $(0, 1)$ et X_1, X_2 les processus gaussiens centrés de covariances $G_1(x, y)$, $G_2(x, y)$.

Si la différence $G_1 - G_2$ appartient à $H_1^{\otimes 2}$, où H_1 est l'espace autoreproduisant de X_1, alors les lois des processus X_1 et X_2 sont équivalentes. Si le degré δ de la différence $A_1 - A_2$ vérifie $\delta \leq 2p - 1$, le théorème d'Inoué (1976) assure: $G_1 - G_2 \in H_1^{\otimes 2}$. La méthode d'Inoué est basée sur le fait que l'opérateur $A_1 - A_2$ est hypoelliptique et utilise le théorème d'Agmon de régularisation elliptique.

Dans le cadre de nos hypothèses, nous ne pouvons utiliser le théorème d'Inoué pour nous ramener au cas plus simple $A_0 = (-1)^p D^p(a(\cdot)D^p)$, puisque la différence $A - A_0$ n'est pas hypoelliptique.

Néanmoins nous conjecturons que la condition degré $(A_1 - A_2) \leq 2p - 1$ est suffisante pour assurer

$$\mathrm{Loi}(X_1) \simeq \mathrm{Loi}(X_2).$$

Par ailleurs la démonstration du Théorème 1.6 est dans son esprit indépendante du fait que la dimension d est égale à 1. Elle peut donc ouvrir la voie au cas d quelconque. Cependant:

1. toutes les tentatives faites pour obtenir des ondelettes à support dyadiques comme dans le Théorème 1.3 ont échoué en dimension d. Il faut trouver d'autres méthodes de construction des bases d'ondelettes dans le cas général. On peut s'attendre à ce que les résultats de dimension 1 soient les plus fins possibles.

2. pour ce qui est de la régularité des champs gaussiens markoviens d'ordre p, il a été démontré dans le cadre d' opérateurs elliptiques quelconques à coefficients C^∞, voir Benassi (1982),

$$\mathbb{P}(X \in H^{d-d/2-\varepsilon}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

et dans le cadre des opérateurs du type $A = \prod_{i=1,\dots,d}(-\Delta + c_i^2)$, voir Benfatto, Galavotti et Nicolò (1980),

$$\mathbb{P}(X \in C^{d-d/2-\varepsilon}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ces résultats suggèrent que la fonction module est du type $\sqrt{h \log h^{-1}}$, en dimension impaire, et $h\mathrm{O}(h)$ en dimension paire, avec $\mathrm{O}(h)$ une fonction logarithme. Donc la méthode de démonstration du Théorème 1.6 ne peut être éventuellement adaptée qu'en dimension impaire.

Références

A. Benassi, Théorème de traces stochastiques et fonctionnelles multiplicatives pour des champs gaussiens markoviens d'ordre *p*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 59 (1982) 333-354.

A. Benassi, Analyse multi-échelle et Probabilités, in: Actes du Colloque de Probabilités numériques, C.I.R.M. Luminy, à paraître (1992).

A. Benassi, S. Jaffard and D. Roux, Analyse multi-échelle des processus gaussiens markoviens d'ordre *p* indexés par (0, 1), C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I 313 (1991) 403-406.

G. Benfatto, G. Galavotti and F. Nicolò, Elliptic equations and gaussian processes, J. Funct. Anal. 36 (3) (1980) 343-400.

K. Inoué, Equivalence of measures for some class of Gaussian fields, J. Multivariate Anal. 6 (2) (1976) 295-308.

S. Jaffard, Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients, Publ. Math. 35 (1991) 155-168.

J.P. Kahane, Some Random Series of Functions (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).

G. Kerkyacharian and B. Roynette, Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Itô-Nisio, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I 312 (1991) 877-882.

H.O. Lancaster, The Chi-squared Distribution (Wiley, New York, 1969).

M.B. Marcus and L.A. Shepp, Sample behavior of Gaussian processes, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. and Statist. (Univ. of California Press, Berkeley, CA, 1971).

Y. Meyer, Ondelettes et Opérateurs, Tomes 1 et 2 (Hermann, Paris, 1990).

J. Neveu, Processus Aléatoires Gaussiens (Les Presses de l'Univ. de Montréal, Montréal, Qué., 1968).

L.D. Pitt, A Markov property for Gaussian processes with a multi-dimensional parameter, Arch. Rational Mec. Anal. 43 (1971) 367-391.

A. Russek, Gaussian *n*-Markovian processes and stochastic boundary value problems, Z. Warsch. Verw. Gebiete 53 (1980) 117-122.