ELSEVIER Stochastic Processes and their Applications 52 (1994) 251–272

stochastic processes and their applications

Enroulements asymptotiques du mouvement brownien autour de lacets dans une variété riemannienne compacte de dimension 3

J. Franchi

Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI, Tour 56, 3ème étage 4, Place Jussieu F-75252, Cedex 05, Paris, France

Received 2 July 1991; revised 15 September 1993

Résumé

Soient M une variété riemannienne compacte de dimension 3, X son mouvement brownien, $\hat{M}$ une sous-variété compacte de codimension 2, et ω une 1-forme fermée sur $M' = M \setminus \hat{M}$; alors l'intégrale de Stratonovitch $t^{-1} \int_0^t \omega(X_s)$ converge en loi vers une variable de Cauchy.

Abstract

Let M be a Riemannian compact manifold of dimension 3, X its Brownian motion, $\hat{M}$ a compact submanifold of codimension 2, and ω a closed 1-form on $M' = M \setminus \hat{M}$; then the Stratonovitch integral $t^{-1} \int_0^t \omega(X_s)$ converges in law towards a Cauchy variable.

Key words: Brownian motion; Stochastic integral; Limit in law; Winding numbers; Differential form; Riemannian manifold; Green function.

AMS Subject Classification: 60H05; 60F05; 53C65.

1. Introduction

L'étude asymptotique des nombres de tours du mouvement brownien a déjà depuis Spitzer [19] donné naissance à de nombreux articles.

Dans le cas précis du mouvement brownien plan, elle a été conduite intensivement, surtout par Le Gall, Pitman et Yor; on trouve ainsi en particulier dans [18] la première version du théorème des résidus stochastique asymptotique, qui généralise l'étude asymptotique des nombres de tours conjoints.

Il existe au moins deux directions naturelles de recherche pour développer plus avant ce genre d'étude, et elles n'ont encore été que partiellement explorées: il est en effet naturel d'une part de chercher à sortir du cadre du plan euclidien, et d'autre part

SSDI 0304-4149(93)E0081-O

de tenter de relier de telles études à des objets ou des problèmes de nature géométrique. Ces deux directions de recherche ne s'excluent d'ailleurs nullement. Citons pour la première de ces deux directions [16], dont le cadre est une variété, ([13], 7), dont le cadre est $\mathbb{S}^2$, [14], dont le cadre est $\mathbb{R}^3$ euclidien, et ([5], 5), dont le cadre est $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}O_3$ ou $\mathbb{S}H_3$.

Une des premières avancées dans la deuxième direction est sans doute [15], qui traite de l'enroulement asymptotique du brownien plan du point de vue de l'homologie.

Quelques travaux progressent dans les deux directions à la fois; citons tout d'abord [20], qui traite de l'enroulement asymptotique du brownien de $\mathbb{S}^3$ autour de lacets du point de vue de l'homotopie; citons ensuite [6], qui donne dans le langage géométrique des 1-formes différentielles une deuxième version du théorème des résidus stochastique asymptotique, valable sur une surface riemannienne compacte générique; citons enfin [7], qui donne un théorème des résidus asymptotique pour des 1-formes différentielles sur des surfaces de courbure négative constante, le mouvement brownien étant remplacé par le flot géodésique.

Dans cet ordre d'idées, le présent travail propose en dimension 3 le résultat analogue de celui de [6]; la méthode mise au point dans [6] reposant fortement sur l'existence en dimension 2 de coordonnées locales conformes, il en fallait une nouvelle; celle qui est présentée ici repose sur une utilisation particulière des fonctions de Green, et offre probablement l'avantage de demeurer pour une large part valable dans les dimensions supérieures; elle ne semble pas en revanche permettre d'obtenir comme dans [6] une expression géométrique du paramètre de la loi de Cauchy asymptotique, à cause de la mauvaise connaissance qu'on a des fonctions de Green près de la diagonale.

2. Plan de l'article

Section 3: On définit un système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) dans un voisinage tubulaire D d'un lacet simple $\mathscr{L}$ de la variété M; on exprime ensuite dans ce système la métrique dl^2 et le développement stochastique infinitésimal de la diffusion (r_t, φ_t, z_t) induite dans D par le mouvement brownien X_t.

Section 4: Ici est introduite la fonction greenienne G sur laquelle repose la méthode suivie dans cet article; son intérêt est d'être en même temps harmonique et proche de r; ce qui permet en particulier de remplacer D par $\mathscr{D}$ défini seulement à l'aide de G. Une autre justification du recours à G est que ni les méthodes usuelles d'approximation de diffusions ni la transformation de Girsanov ne permettent de se débarrasser du terme de drift présent dans l'expression de dr_t.

Section 5: Comme dans [6], on examine une suite d'excursions qui pénètrent suffisamment dans $\mathscr{D}$, puis on en déduit la convergence en loi de $t^{-1}\phi_t$, où ϕ_t est définie de façon à former avec $G(X_t)$ un produit semi-direct, tout en ayant le même comportement asymptotique que φ_t; le couple (G, ϕ), quoiqu'il ne puisse pas servir de coordonnées, tient lieu ici du couple de coordonnées conformes (r, φ) de [6]; la démonstration de la Proposition 3 est d'ailleurs pour l'essentiel reprise de [6].

Section 6: On considère ici n lacets simples $\mathscr{L}_j$ et une 1-forme ω définie hors des $\mathscr{L}_j$ et fermée près des $\mathscr{L}_j$.

Les Lemmes 11 et 12 (repris de [6]) assurent que $t^{-1}\int_0^t \omega(X_s)$ est asymptotiquement négligeable si ω est régulière ou exacte; la Proposition 4 ramène alors l'étude de $t^{-1}\int_0^t \omega(X_s)$ à celle des nombres de tours φ_t^j conjoints de X_t autour des $\mathscr{L}_j$; on termine en appliquant la conclusion de la Section 5.

Notations 0. $Y_t \approx Z_t$ signifiera: $Y_t - Z_t$ converge en probabilité vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

$F^j(r_s^j, \psi_s^j, z_s^j)$ pourra être abrégé par F_s^j, ou $F(r_s, \psi_s, z_s)$ ou $F(X_s)$ par F_s.

3. Un système de coordonnées cylindriques locales

Soit M une variété riemannienne connexe compacte de classe C^3 et de dimension 3. Notons dl^2 sa métrique, Δ son opérateur de Laplace-Beltrami, m sa probabilité invariante, V son volume, d sa distance géodésique, et X_t son mouvement brownien.

Soit $\mathscr{L}$ un lacet de M, de classe C^3 et de longueur ℓ, qu'on suppose sans point multiple.

Notations 1. $r(x) = \mathrm{Log}[d(x, \mathscr{L})]$ pour tout x de M, et pour R das $\mathbb{R}_-$ $D = D_R = r^{-1}([-\infty, R])$ et $D' = D'_R = r^{-1}(]-\infty, R[) = \mathring{D} \setminus \mathscr{L}$.

Fixons sur $\mathscr{L}$ une abscisse curviligne z décrivant $\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$ et telle que $\|\partial/\partial z\| = 1$.

Fixons en chaque x de $\mathscr{L}$ une base orthonormale (e^1, e^2, e^3) de $T_x M$ dépendant régulièrement de x telle que $e^3 \in T_x\mathscr{L}$. On dispose ainsi en chaque x de $\mathscr{L}$ d'une longitude $\psi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et d'une latitude $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, de sorte que $e^1 = \{\theta = \psi = 0\}$, $e^2 = \{\theta = 0,\ \psi = \pi/2\}$, $e^3 = \{\theta = \pi/2\}$. Pour $x \in \mathscr{L}$ encore,

notons: $V_x(\theta, \psi)$ le vecteur normé de coordonnées θ et ψ dans $T_x M$,

$\mathscr{G}_x(\psi)$ la géodésique déterminée par x et $V_x(0, \psi)$ et arrêtée par ∂D,

p la projection de $\mathscr{G}_x(\psi)$ sur x, et $\mathscr{S}(x)$ la réunion des $\mathscr{G}_x(\psi)$ pour ψ décrivant $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Fixons R assez petit pour que: $\mathscr{S}(x) \cap \mathscr{S}(x') = \emptyset$ si $x \neq x'$ dans $\mathscr{L}$, $D = \bigcup_{x \in \mathscr{L}} \mathscr{S}(x)$, et $r(x) = \mathrm{Log}[d(x, p(x))]$ pour tout x de D.

Notation 2. Pour tout x de D' soient $z(x) = z(p(x))$ et $\psi(x)$ l'unique ψ de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $x \in \mathscr{G}_{p(x)}(\psi)$.

On dispose ainsi d'un système de coordonnées (r, ψ, z) sur D'.

Lemme 1. *Dans D', dl^2 s'écrit:*

$$e^{2r}(dr^2 + v^2 \, d\psi^2) + h^2 \, dz^2 + 2e^r w \, d\psi \, dz.$$

Preuve. Dans un voisinage de tout x de D', on a également un système de coordonnées (r, ψ, θ):

$$(r, \psi, \theta) \mapsto \exp_{p(x)}(e^r V_{p(x)}(\theta, \psi));$$

or d'après [8, 9.7 p. 52] la pseudo-sphère $S(p(x), e^{r(x)})$ est orthogonale à $\mathscr{G}_{p(x)}(\psi(x))$, ce qui signifie que $\partial/\partial r \perp \{\partial/\partial\psi, \partial/\partial\theta\}$ dans tout D'; d'où également $\partial/\partial z \perp \partial/\partial r$; exprimant ensuite à l'aide des coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k que $\mathscr{G}_x(\psi)$ est une géodésique, on obtient:

$$r''(t) + \Gamma_{11}^1 (r'(t))^2 = 0 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{11}^3, \quad \text{d'où } g^{i2} \frac{\partial g_{11}}{\partial \psi} + g^{i3} \frac{\partial g_{11}}{\partial z} = 0,$$

pour $i = 1, 2$ et donc $g_{11} = g_{11}(r)$; on exprime enfin que e^r est la distance de (r, ψ, z) à $(-\infty, z)$ pour obtenir que $g_{11}(r) = e^{2r}$. $\square$

Notations 3. Posons

$$g = (v^2 h^2 - w^2)^{1/2}, \qquad \tilde{g} = e^{-r} \frac{\partial}{\partial r} (\operatorname{Log} g),$$

$$a = g^{-1} \times \left(e^{-r} \frac{\partial}{\partial \psi} (h^2 g^{-1}) - \frac{\partial}{\partial z} (w g^{-1}) \right) \quad \text{et}$$

$$b = g^{-1} \times \left(\frac{\partial}{\partial z} (v^2 g^{-1}) - e^{-r} \frac{\partial}{\partial \psi} (w g^{-1}) \right).$$

Lemme 2. (i) *$g, w^2, v, h, g^{-1}, h^{-1}$ se prolongent en des fonctions de classe C^3 dans D;*

(ii) *les restrictions de h et g à $\mathscr{L}$ valent* 1;

(iii) *on a dans D:*

$$dm = V^{-1} e^{2r} g \, dr \, d\psi \, dz$$

et

$$\Delta = e^{-2r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + h^2 g^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) - 2e^{-r} w g^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial z} + v^2 g^{-2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + e^{-r} \tilde{g} \frac{\partial}{\partial r}$$
$$+ e^{-r} a \frac{\partial}{\partial \psi} + b \frac{\partial}{\partial z}.$$

(iv) *$\tilde{g}$, a et b sont des fonctions de classe C^2 bornées dans D, et donc sont dans $L^1(D, e^{-r} m)$;*

(v) *pour toute fonction F continue bornée sur $[-\infty, R]$ on a:*

$$\int_D F(r) b \, dm = \int_D F(r) e^{-r} a \, dm = 0.$$

Preuve. (i) Posant $x = e^r \cos\psi$, $y = e^r \sin\psi$, et $dl^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j$ dans les coordonnées (x, y, z), on obtient des fonctions $\bar{g}_{ij}$ régulières dans D telles que:

$$w^2 = (\bar{g}_{13})^2 + (\bar{g}_{23})^2, \qquad v^2 = \bar{g}_{11} + \bar{g}_{22} - 1, \qquad g^2 = \det((\bar{g}_{ij})) > 0;$$

(ii) le choix de z impose que $h|_{\mathscr{L}} = 1$; d'autre part par restriction de dl^2, la forme-volume induite sur $\{r = u\}$ est $d\sigma_u = e^u g(u, \psi, z) d\psi\, dz$, équivalente lorsque $u \to -\infty$ à $(e^u d\psi) \cdot g(-\infty, z) dz$, ce qui impose à la forme-volume induite sur $\mathscr{L}$ de valoir $d\lambda = g(-\infty, z) dz$; donc le choix de z impose également que $g|_{\mathscr{L}} = 1$;

(iii) on a d'après le Lemme 1, $\det((g_{ij})) = e^{4r} g^2$, et on applique la formule

$$\Delta = (\det)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} (\det)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x^j} \right);$$

(iv) il suffit de remarquer que

$$e^{-r} \frac{\partial}{\partial \psi} = \cos\psi \frac{\partial}{\partial y} - \sin\psi \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad e^{-r} \frac{\partial}{\partial r} = \cos\psi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\psi \frac{\partial}{\partial y};$$

(v) il suffit d'intégrer par parties. □

Lors de chacune de ses excursions dans D, du fait que $\mathscr{L}$ est polaire, X_t induit une diffusion (r_t, ψ_t, z_t), qu'on étend à $\mathbb{R}_+$ entier en posant:

Notations 4.

$$r_0 = R \text{ si } X_0 \notin D, \qquad r_t = r_0 + \int_0^t 1_D(X_s)\, dr_s, \qquad \varphi_t = \int_0^t 1_D(X_s)\, d\psi_s,$$

$$Z_t = \int_0^t 1_D(X_s)\, dz_s.$$

Lemme 3. (i) *Notant B, W, Y trois mouvements browniens réels indépendants, on a dans D':*

$$dr_s = e^{-r_s} dB_s + e^{-r_s} \tilde{g}_s\, ds/2,$$

$$d\varphi_s = e^{-r_s} h_s g_s^{-1}\, dW_s + e^{-r_s} a_s\, ds/2,$$

$$dZ_s = h_s^{-1}\, dY_s - w_s h_s^{-1} g_s^{-1}\, dW_s + b_s\, ds/2,$$

(ii)

$$t^{-1} Z_t \approx t^{-1} \int_0^t 1_D(X_s) e^{-r_s} a_s\, ds \approx 0.$$

Preuve (i) Donnons-nous a priori un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^3$:

$$\beta = \begin{pmatrix} B \\ W \\ Y \end{pmatrix},$$

un vecteur

$$V = \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix},$$

et une matrice A de format (3.3), les coefficients de V et A étant des fonctions numériques de classe C^3 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$; notons

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

une semi-martingale solution de: $\mathrm{d}\tilde{X}_s = A(\tilde{X}_s)\,\mathrm{d}\beta_s + V(\tilde{X}_s)\,\mathrm{d}s$; pour toute fonction F de $C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, la formule d'Itô s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(\tilde{X}_s) &= \sum_i D_iF(\tilde{X}_s)\,\mathrm{d}x_s^i + 2^{-1}\sum_{i,j} D_iD_jF(\tilde{X}_s)\langle \mathrm{d}x_s^i, \mathrm{d}x_s^j\rangle \\ &= (DF(\tilde{X}_s)^t)A(\tilde{X}_s)\mathrm{d}\beta_s + \sum_{i,j}[(AA^t)_{ij}(\tilde{X}_s)][D_iD_jF(\tilde{X}_s)]\,\mathrm{d}s/2 \\ &\quad + (DF(\tilde{X}_s)^t)\,V(\tilde{X}_s)\,\mathrm{d}s; \end{aligned}$$

par conséquent le générateur de $\tilde{X}$ est $F \to 2^{-1}\sum_{i,j}(AA^t)_{ij}D_iD_jF + V^tDF$; on peut donc remplacer $\tilde{X}$ par

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

dans D' ssi ce générateur vaut $\Delta/2$, ie ssi

$$V^j = 2^{-1}g^{-1/2}\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(g^{ij}g^{1/2}) \quad \text{et} \quad AA^t = ((g^{ij}))$$

(une présentation un peu différente de ceci se trouve dans [11, V, th1.2]; et cherchant A sous la forme

$$\begin{bmatrix} e^{-r} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \lambda & \gamma \end{bmatrix},$$

on trouve:

$$\alpha = e^{-r}hg^{-1}, \qquad \lambda = -wh^{-1}g^{-1}, \qquad \gamma = h^{-1};$$

(ii) $t^{-1}\displaystyle\int_0^t 1_D(X_s)h_s^{-1}\,\mathrm{d}Y_s$ et $t^{-1}\displaystyle\int_0^t 1_D(X_s)w_sh_s^{-1}g_s^{-1}\,\mathrm{d}W_s$

tendent vers 0 dans L^2, et le théorème ergodique fait avec le Lemme 2(v) que

$$t^{-1}\int_0^t 1_D(X_s)b_s\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad t^{-1}\int_0^t 1_D(X_s)\mathrm{e}^{-r_s}a_s\,\mathrm{d}s \quad \text{tendent p.s. vers 0.} \quad \square$$

Lemme 4. *La distribution Δr se caractérise dans D par: pour toute F dans $C^2(M)$ à support dans D:*

$$\langle \Delta r, F\rangle = \int_{D'} \mathrm{e}^{-r}\tilde{g}FV\,\mathrm{d}m + 2\pi\int_{\mathscr{L}} F\,\mathrm{d}z.$$

Preuve. Le Lemme 2 (iii) montre que $\Delta r = \mathrm{e}^{-r}\tilde{g}$ dans D', et donc en appliquant la formule de Green et le Lemme 2(i) et (ii) on obtient:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta r, F\rangle &= \int_M \Delta F\cdot rV\,\mathrm{d}m = \lim_{u\to-\infty}\int_{\{u\le r\le R\}} \Delta F\cdot rV\,\mathrm{d}m\\
&= \lim_{u\to-\infty}\Bigg[\int_{\{u\le r\le R\}} F\mathrm{e}^{-r}\tilde{g}\mathrm{e}^{2r}g\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}z + \int_{\{r=u\}}\frac{\partial F}{\partial n}u\mathrm{e}^{u}g\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}z\\
&\qquad - \int_{\{r=u\}}\frac{\partial r}{\partial n}F\mathrm{e}^{u}g\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}z\Bigg]\\
&= \int_{D'} F\mathrm{e}^{r}\tilde{g}g\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}z + \lim_{u\to-\infty} u\mathrm{e}^{u}\int_{\{r=u\}}\frac{\partial F}{\partial n}g\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}z + \lim_{u\to-\infty}\int_{\{r=u\}} Fg\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}z\\
&= \int_{D'} \mathrm{e}^{-r}\tilde{g}FV\,\mathrm{d}m + 0 + 2\pi\int_{\mathscr{L}} F\,\mathrm{d}z. \qquad \square
\end{aligned}$$

4. Fonctions de Green

Soit $(0=\alpha_0>\alpha_1\ge\alpha_2\ge\cdots\ge\alpha_n\ge\cdots;\ \phi_0=V^{-1/2},\ \phi_1,\dots,\phi_n,\dots)$ la résolution spectrale de (M,Δ) (relative à la mesure invariante $V\cdot m$).
Considérons le noyau de la chaleur associé, et sa fonction de Green:

$$p_t(x,y) = \sum_{k\ge 0}\mathrm{e}^{\alpha_k t/2}\phi_k(x)\phi_k(y)$$

et

$$\tilde{G}(x,y) = \int_0^\infty (p_t(x,y)-V^{-1})\,\mathrm{d}t = -2\sum_{k\ge1}\alpha_k^{-1}\phi_k(x)\phi_k(y)$$

(voir [12, 17]); on a au sens des distributions:

$$\Delta\tilde{G}(x,\cdot) = -2\sum_{k\ge1}\alpha_k^{-1}\phi_k(x)\Delta\phi_k = -2\sum_{k\ge1}\phi_k(x)\phi_k = -2(\delta_x - V^{-1}).$$

Fixons x_0 dans $M\backslash D$, et posons:

$$G^z(y) = \tilde{G}(x_0,y) - \tilde{G}(z,y) \quad \text{de sorte que } \Delta G^z = 2(\delta_z - \delta_{x_0}).$$

Définition 5. Soit G le potentiel électrostatique défini par;

$$G(y) = \pi \int_{\mathscr{L}} G^z(y)\,\mathrm{d}z$$

pour tout y de M. Nous allons voir que G approxime bien r.

Lemme 5. *G est harmonique dans $M\backslash(\mathscr{L} \cup \{x_0\})$, et $\nabla(r - G) \in L^2(D, m)$.*

Preuve. Pour toute F dans $C^2(M)$ on a au sens des distributions:

$$\langle \Delta G, F\rangle = \pi \int_{\mathscr{L}} \langle \Delta G^z, F\rangle\,\mathrm{d}z = \pi \int_{\mathscr{L}} 2(F(z) - F(x_0))\,\mathrm{d}z = 2\pi \int_{\mathscr{L}} F\,\mathrm{d}z - 2\pi\ell F(x_0);$$

en particulier, $\Delta G = 0$ dans $M\backslash(\mathscr{L} \cup \{x_0\})$, et la distribution $(r - G)$ est de laplacien égal dans D à la fonction $\mathrm{e}^{-r}\tilde{g} \in C^0(D') \cap L^1(D, m)$ (Lemmes 4 et 2 (iv), appliquant le théorème d'hypoellipticité 18.1.29, p. 471 de [9], on obtient:

$$\Delta(r - G) \in L^1(D) \;\Rightarrow\; \mathscr{F}(\Delta(r - G)) \in L^\infty(D) \;\Rightarrow\; \Delta(r - G) \in H_{-1} \;\Rightarrow\; (r - G) \in H_1,$$

d'où

$$(r - G) \in L^2(D, m) \quad \text{et} \quad \nabla(r - G) \in L^2(D, m). \quad \square$$

Lemme 6. $(r - G)$ est bornée dans D.

Preuve. (i) Pour tout $c > 0$ posons

$$\tilde{G}_c(x, y) = \int_c^\infty (p_t(x, y) - V^{-1})\,\mathrm{d}t = -2 \sum_{k \geq 1} \alpha_k^{-1} \mathrm{e}^{\alpha_k c/2} \phi_k(x)\phi_k(y);$$

il est clair d'après [17] que $\tilde{G}_c$ est bornée sur M^2, et donc que

$\tilde{G} - \int_0^c p_t\,\mathrm{d}t$ est bornée sur M^2; or d'après [2, p. 204] on a:

$|p_t - (2\pi t)^{-3/2} \mathrm{e}^{-d^2/2t} u_0| \leq Ct^{-1/2}$,

où

$u_0(x, y) = [\det((g_{ij}(x)))/\det((g_{ij}(y)))]^{1/4}$;

ceci fait en particulier que

$$\tilde{G} - \int_0^c (2\pi t)^{-3/2} \mathrm{e}^{-d^2/2t} u_0\,\mathrm{d}t$$

est bornée; or changeant t en $d^2/2t^2$ on a:

$$\int_0^c (2\pi t)^{-3/2} \mathrm{e}^{-d^2/2t}\,\mathrm{d}t - (2\pi d)^{-1} = \pi^{-3/2} d^{-1} \int_0^{(2c)^{-1}d} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui montre par régularité de u_0 que $[\tilde{G} - (2\pi d)^{-1}]$ est bornée sur M^2;

(ii) La définition 5(i) et la régularité de $\tilde{G}(x_0,\cdot)$ dans D font que $y \to G(y) + \pi \int_{\mathscr{L}} (2\pi d(z,y))^{-1}\,\mathrm{d}z$ est bornée dans D;
or, d'après le Lemme 1 et le Lemme 2(i) et (ii), et par régularité locale de d, on a pour tout x de $\mathscr{L}$:

$$|d(x,y) - ((z(x)-z(y))^2 + \mathrm{e}^{2r(y)})^{1/2}| \le C((z(x)-z(y))^2 + \mathrm{e}^{2r(y)});$$

ceci entraîne que $(d^{-1}(x,y) - ((z(x)-z(y))^2 + \mathrm{e}^{2r(y)})^{-1/2})$ est bornée, ainsi que son intégrale sur $\mathscr{L}$; donc

$$y \to G(y) + 2^{-1}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} (u^2 + \mathrm{e}^{2r(y)})^{-1/2}\,\mathrm{d}u$$

est bornée dans D; on conclut en remarquant que

$$r(y) + 2^{-1}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} (u^2 + \mathrm{e}^{2r(y)})^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \mathrm{Log}(\ell/2 + ((\ell/2)^2 + \mathrm{e}^{2r(y)})^{1/2})$$

est bornée dans D. □

Définition 6. Soient $G_t = G(X_t)$, $\lambda = \| \nabla G \|$, $\bar{\Gamma}$ un mouvement brownien réel indépendant de X, et

$$\Gamma_t = \int_0^t 1_{\{\lambda_s \neq 0\}} \lambda_s^{-1}\,\mathrm{d}G_s + \int_0^t 1_{\{\lambda_s = 0\}}\,\mathrm{d}\bar{\Gamma}_s.$$

Lemme 7. (i) *G_t est une martingale locale, Γ est un mouvement brownien réel, et on a* $\mathrm{d}G_s = \lambda(X_s)\,\mathrm{d}\Gamma_s$;

(ii) $(\lambda - \mathrm{e}^{-r}) \in L^2(D,m)$;

(iii) $\langle \mathrm{d}\Gamma_s, \mathrm{d}W_s\rangle = f_s\,\mathrm{d}s$, *où f est mesurable dans D' et vérifie*:

$$|f_s| \le 1 \text{ p.s.} \quad \text{et} \quad \lambda^2 f \in L^1(D,m).$$

Preuve. (i) G_t est une martingale locale parce que $\mathscr{L} \cup \{x_0\}$ est polaire, et à cause du Lemme 5; on a de plus $\langle \mathrm{d}G_s \rangle = \lambda_s^2\,\mathrm{d}s$ (ou bien, autrement dit, $\mathrm{d}G_s = (\nabla G | \mathrm{d}X_s)_g$); d'où $\langle \mathrm{d}\Gamma_s \rangle = \mathrm{d}s$ et $\langle \mathrm{d}G_s - \lambda_s\,\mathrm{d}\Gamma_s \rangle = 0$, ce qui suffit puisque Γ_t et $\int_0^t (\mathrm{d}G_s - \lambda_s\,\mathrm{d}\Gamma_s)$ sont des martingales locales;

(ii) Utilisant le Lemme 3(i), on a lors de chaque excursion dans D:

$$\mathrm{d}G_s = \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_s \mathrm{e}^{-r_s}\mathrm{d}B_s + \left(\frac{\partial G}{\partial \psi}\right)_s \mathrm{e}^{-r_s} h_s g_s^{-1}\,\mathrm{d}W_s + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_s (h_s^{-1}\,\mathrm{d}Z_s - w_s h_s^{-1} g_s^{-1}\,\mathrm{d}W_s),$$

d'où dans D':

$$\lambda^2 = \left(\mathrm{e}^{-r} - \mathrm{e}^{-r}\left(\frac{\partial(r-G)}{\partial r}\right)\right)^2 + \left(h^{-1}\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-r} h g^{-1}\frac{\partial G}{\partial \psi} - w h^{-1} g^{-1}\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2;$$

soit $\hat{\lambda} = \lambda^2 - \mathrm{e}^{-2r}$; λ étant ≥ 0, on a $(\lambda - \mathrm{e}^{-r})^2 \le |\hat{\lambda}|$ dans D';

il suffit donc de vérifier que $\hat{\lambda} \in L^1(D, m)$; or notant

$$\nabla_1 = e^{-2r} \frac{\partial}{\partial r}, \qquad \nabla_2 = e^{-2r} h^2 g^{-2} \frac{\partial}{\partial \psi} - e^{-r} w g^{-2} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et}$$

$$\nabla_3 = v^2 g^{-2} \frac{\partial}{\partial z} - e^{-r} w g^{-2} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

on remarque qu'on a $\nabla = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3)$ et $\partial/\partial z = e^r w \nabla_2 + h^2 \nabla_3$ dans D'; le Lemme 5 entraîne donc que

$$\hat{\lambda} = e^{2r}(\nabla_1(r - G))^2 - 2\nabla_1(r - G) + h^{-2}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + h^{-2} g^2 e^{2r} (\nabla_3 G)^2 \in L^1(D, m);$$

(iii) d'une part $|\langle d\Gamma_s, dW_s \rangle|^2 \le \langle d\Gamma_s \rangle \langle dW_s \rangle$ entraîne $|f_s| \le 1$ p.s.; d'autre part on utilise que

$f = 1_{\{\lambda \ne 0\}} \lambda^{-1} h^{-1} g e^r \nabla_2 G$, que $\lambda e^r = (1 + \hat{\lambda} e^{2r})^{1/2} \in L^2(D, m)$, que

$\nabla_2 G \in L^2(D, m)$, et le Lemme 2(i), pour obtenir:

$$\int_D \lambda^2 |f| \, dm \le C \int_D \lambda e^r |\nabla_2 G| \, dm < \infty. \qquad \square$$

4. Excursions dans $(K, \mathscr{D})$

Fixons un réel < 0: R, et un réel > 0: ρ, et posons:

Notation 7. $\mathscr{D} = \{G \le R\}$ et $K = \{G \le R - \rho\}$.

Remarque. Le Lemme 6 assure que pour R assez petit tout ce qui précède (sauf peut-être le lemme 3(ii)) est valable avec $\mathscr{D}$ au lieu de D; de plus, comme $G|_{\partial \mathscr{D}} = R$, K est un compact inclus dans l'intérieur de $\mathscr{D}$.

Définition 8.

$$\tau_1 = \text{Inf}\{t > 0 \mid X_t \in K\}, \qquad \zeta_k = \text{Inf}\{t > \tau_k \mid X_t \notin \mathscr{D}\}, \quad \tau_{k+1} = \text{Inf}\{t > \zeta_k \mid X_t \in K\}$$

et

$$\mu_t = \text{Max}\{k \in \mathbb{N}^* \mid \zeta_k \le t\}, \qquad \sigma^k = \int_{\tau_k}^{\zeta_k} \lambda_s^2 \, ds.$$

Lemme 8. *Les variables σ^k, $k \ge 2$, sont indépendantes et ont pour loi celle du temps d'atteinte σ_ρ de ρ par un brownien réel issu de 0.*

Preuve. Fixons un entier $m \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_m$ dans $\mathbb{R}_+$; on a par la propriété forte de Markov:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{k=2}^{m} a_k \sigma^k\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{X_{\tau_m}}(\mathrm{e}^{-a_m \sigma^1})\exp\left(-\sum_{k=2}^{m-1} a_k \sigma^k\right)\right];$$

or $G(X_{\tau_m}) = R - \rho$ entraîne que $\mathbb{P}_{X_{\tau_m}}$ – p.s. on a:

$$G_t = R - \rho + \beta\left(\int_0^t \lambda_s^2 \,\mathrm{d}s\right) \quad \text{avec } \beta \text{ brownien réel issu de 0, et}$$

$$\sigma^1 = \int_0^{\mathrm{Inf}\{t \mid G_t > R\}} \lambda_s^2 \,\mathrm{d}s = \mathrm{Inf}\left\{\int_0^t \lambda_s^2 \,\mathrm{d}s \,\middle|\, \beta\left(\int_0^t \lambda_s^2 \,\mathrm{d}s\right) > \rho\right\} = \sigma_\rho;$$

d'où,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{k=2}^{m} a_k \sigma^k\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_0(\mathrm{e}^{-a_m \sigma_\rho})\exp\left(-\sum_{k=2}^{m-1} a_k \sigma^k\right)\right] \\ &= \mathrm{e}^{-\rho(2a_m)^{1/2}}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{k=2}^{m-1} a_k \sigma^k\right)\right] \\ &= \prod_{k=2}^{m} \exp(-\rho(2a_k)^{1/2}) \quad \text{par récurrence.} \qquad \square\end{aligned}$$

Lemme 9. *$t^{-1}\mu_t$ converge p.s. lorsque $t \to \infty$ vers un réel α déterministe > 0.*

Preuve. Soit E l'ensemble des excursions de $\partial\mathscr{D}$ à $\partial\mathscr{D}$ via K définies sur un intervalle $[0, \zeta]$, i.e. des fonctions e continues de $[0, \zeta]$ dans M telles que: $e(0) \in \partial\mathscr{D}$, $\tau = \inf\{t > 0 \mid e(t) \in K\} < \infty$, et $\zeta = \inf\{t > \tau \mid e(t) \notin \mathscr{D}\} < \infty$; soient $\Omega = E^{\mathbb{N}^*}$, $\{Y_1, \ldots, Y_k, \ldots\}$ les coordonnées dans Ω, $Y_k \circ \theta = Y_{k+1}$, et $\mathbb{Q}$ la probabilité sur Ω conférant à $(Y_1, \ldots, Y_k, \ldots)$ la loi de $(X|_{[\zeta_1, \zeta_2]}, \ldots, X|_{[\zeta_k, \zeta_{k+1}]}, \ldots)$ pour la probabilité ν_0 invariante pour la chaîne X_{ζ_k} sur $\partial\mathscr{D}$ (l'existence de ν_0 est démontrée dans [1, II]); comme $\zeta_{k+1} = \zeta_k \circ \Theta_{\zeta_1} + \zeta_1$, on a $\theta(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, et donc le théorème ergodique de Birkhoff affirme que, $\zeta \circ Y_1$ étant $\mathbb{Q}$-intégrable (fait qui est établi dans [1, II]),

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \zeta \circ Y_k \text{ converge p.s. vers } \int \zeta \circ Y_1 \,\mathrm{d}\mathbb{Q},$$

i.e.

$$\frac{1}{p}\zeta_p \xrightarrow[p \to \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}_{\nu_0}(\zeta_2 - \zeta_1) = \alpha_0.$$

On a donc

$$\frac{1}{\mu_t}\zeta_{\mu_t} \xrightarrow[\text{p.s.}]{t \to \infty} \alpha_0;$$

alors

$$\zeta_{\mu_t} \le t \le \zeta_{\mu_t+1} \text{ entraîne}$$

$$0 \le \frac{t}{\mu_t} - \frac{\zeta_{\mu_t}}{\mu_t} \le \frac{\zeta_{\mu_t+1}}{\mu_t+1}\left(\frac{1}{\mu_t}+1\right) - \frac{\zeta_{\mu_t}}{\mu_t}$$

et donc

$$\frac{\mu_t}{t} \xrightarrow[\text{p.s.}]{t\to\infty} \frac{1}{\alpha_0} = \alpha. \qquad \square$$

Complément (non utilisé dans la suite): μ_t étant (à 1 près) une fonctionnelle additive intégrable, le théorème ergodique assure également que $\alpha = \mathbb{E}_m(\mu_1)$: voir [3, 2] pour plus de précision. Il est démontré de plus dans [3, 2] que cette limite α obtenue au Lemme 9 est la capacité de ∂K pour le processus X tué sur $\partial\mathscr{D}$.

Définition 9. Pour $0 < \varepsilon < 1$ soit $u_t^\varepsilon = [t(1-\varepsilon)\alpha]$ la partie entière de $t(1-\varepsilon)\alpha$ (ie $\mathrm{Max}\{k \in \mathbb{N} \mid k \le t(1-\varepsilon)\alpha\}$); de même, soit $v_t^\varepsilon = [t(1+\varepsilon)\alpha]$;
soit enfin $J_t^\varepsilon = \{u_t^\varepsilon < \mu_t < v_t^\varepsilon\}$.

Proposition 1. *$t^{-2}\int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s^2\,\mathrm{d}s$ converge en loi lorsque $t\to\infty$ vers $\sigma_{\rho\alpha}$.*

Preuve. λ étant bornée dans $\mathscr{D}\backslash K$, on a:

$$t^{-2}\int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s^2\,\mathrm{d}s \approx t^{-2}\int_{t\wedge\tau_1}^{t\wedge\zeta_1}\lambda_s^2\,\mathrm{d}s + t^{-2}\sum_{k\ge2}\int_{t\wedge\tau_k}^{t\wedge\zeta_k}\lambda_s^2\,\mathrm{d}s \approx t^{-2}\sum_{k\ge2}\int_{t\wedge\tau_k}^{t\wedge\zeta_k}\lambda_s^2\,\mathrm{d}s;$$

qui est sur J_t^ε compris entre

$$t^{-2}\sum_{k=2}^{u_t^\varepsilon}\int_{\tau_k}^{\zeta_k}\lambda_s^2\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad t^{-2}\sum_{k=2}^{v_t^\varepsilon}\int_{\tau_k}^{\zeta_k}\lambda_s^2\,\mathrm{d}s;$$

on a donc d'après les Lemmes 8 et 9 pour tous $\varepsilon > 0$ et $a > 0$:

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left(-at^{-2}\int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s^2\,\mathrm{d}s\right)\right] &\le \limsup_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left(-at^{-2}\sum_{k=2}^{u_t^\varepsilon}\sigma^k\right)\right]\\
&= \limsup_{t\to\infty}\exp(-\rho t^{-1}(u_t^\varepsilon-1)(2a)^{1/2})\\
&= \exp(-\rho\alpha(2a)^{1/2}(1-\varepsilon))\\
&\xrightarrow[\varepsilon\to0]{} \mathbb{E}[\exp(-a\sigma_{\rho\alpha})],
\end{aligned}$$

et la minoration est obtenue de même, en utilisant v_t^ε. $\square$

Lemme 10. *Il existe un mouvement brownien réel γ indépendant de Γ tel que*

$$t^{-1}\int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s(\mathrm{d}\gamma_s - \mathrm{d}W_s) \approx 0$$

(*le sens de $\approx$ est toujours celui de la notation* 0).

Preuve. Soit

$$\gamma_t = \int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s) 1_{\{|f_s|<1\}}(1-f_s^2)^{-1/2}(\mathrm{d}W_s - f_s \mathrm{d}\Gamma_s)$$
$$+ \int_0^t (1_{\mathscr{D}}(X_s)1_{\{|f_s|=1\}} + 1_{M\setminus\mathscr{D}}(X_s))\,\mathrm{d}\hat{W}_s,$$

avec $\hat{W}$ brownien réel indépendant de (W, Γ);
on a bien $\langle \mathrm{d}\gamma_s \rangle = \mathrm{d}s$ et $\langle \mathrm{d}\gamma_s, \mathrm{d}\Gamma_s \rangle = 0$, et de plus:

$$\left\langle t^{-1}\int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s(\mathrm{d}\gamma_s - \mathrm{d}W_s)\right\rangle = 2t^{-2}\int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s^2(\mathrm{d}s - \mathrm{d}\langle \gamma, W\rangle_s)$$
$$= 2t^{-2}\int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s^2(1 - 1_{\{|f_s|<1\}}(1-f_s^2)^{-1/2}(1-f_s^2))\,\mathrm{d}s$$
$$= 2t^{-2}\int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s^2(1-(1-f_s^2)^{1/2})\,\mathrm{d}s \le 2t^{-2}\int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s^2|f_s|\,\mathrm{d}s$$

qui converge p.s. vers 0 car d'après le théorème ergodique et le Lemme 7 on a

$$t^{-1}\int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s^2|f_s|\,\mathrm{d}s \to \int_{\mathscr{D}} \lambda^2|f|\,\mathrm{d}m < \infty. \qquad \square$$

Définition 10. Soit $\phi_t = \int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)\lambda_s \mathrm{d}\gamma_s = \phi_t^R$. C'est une approximation de φ_t.

Proposition 2. *Les variables* $\psi^k = \int_{\tau_k}^{\zeta_k} \lambda_s \mathrm{d}\gamma_s$, $k \ge 2$, *sont indépendantes, et de Cauchy de paramètre* ρ.

Preuve. Procédant comme pour le Lemme 8, on a pour $m \ge 2$ et $b_2, \ldots, b_m$ réels:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=2}^m b_k\psi^k\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{X_{\tau_m}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}b_m(\phi_{\zeta_1}-\phi_0)})\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=2}^{m-1} b_k\psi^k\right)\right],$$

et $\mathbb{P}_{X_{\tau_m}}$-p.s. on a:
$\phi_t = \phi_0 + \hat{\beta}(\int_0^t \lambda_s^2\,\mathrm{d}s)$ avec $\hat{\beta}$ brownien réel issu de 0, indépendant de β puisque γ l'est de Γ, d'où $\phi_{\zeta_1} - \phi_0 = \hat{\beta}(\sigma^1) = \hat{\beta}(\sigma_\rho)$; par conséquent:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=2}^m b_k\psi^k\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{0,0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}b_m\hat{\beta}(\sigma_\rho)})\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=2}^{m-1} b_k\psi^k\right)\right]$$
$$= \mathrm{e}^{-|b_m|\rho}\,\mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=2}^{m-1} b_k\psi^k\right)\right]$$
$$= \prod_{k=2}^m \mathrm{e}^{-|b_k|\rho} \quad \text{par récurrence.} \qquad \square$$

Proposition 3. *$(t^{-1}\phi_{tu})_{u\geq 0}$ converge au sens des distributions marginales de dimension finie, lorsque $t\to\infty$, vers un processus de Cauchy de paramètre $\rho\alpha$.*

Preuve. Il s'agit essentiellement de se ramener à la Proposition 2, en montrant qu'on peut remplacer ϕ_{ut} par $\sum_{k=2}^{\mu_{ut}}\psi^k$ (c'est l'objet de (i) ci-dessous), puis par $\sum_{k=2}^{v_{ut}^{\varepsilon}}\psi^k$ (c'est l'objet de (ii) ci-dessous); mais l'argument de retournement de temps utilisé dans (i) nécessite que X soit stationnaire; (iii) achève la démonstration dans le cas stationnaire, par application de la Proposition 2; il reste alors à prouver, dans (iv) et (v), que le cas stationnaire entraîne le cas général.

(i) Tout d'abord, λ étant bornée dans $\mathscr{D}\backslash K$, $t^{-1}(\phi_{ut}-\sum_{k\geq 1}\int_{ut\wedge\tau_k}^{ut\wedge\zeta_k}\lambda_s\,\mathrm{d}\gamma_s)$ converge dans L^2 vers 0, et la contribution $t^{-1}\int_{\tau_1}^{\zeta_1}\lambda_s\,\mathrm{d}\gamma_s$ de la première excursion (éventuellement incomplète) converge presque sûrement vers 0; de plus la contribution d'une éventuelle dernière excursion incomplète est asymptotiquement négligeable en probabilité, car par retournement du temps de X au temps fixe ut, lorsque X est stationnaire de loi m, on a pour tout $\eta>0$:

$$\mathbb{P}_m\left[\left|t^{-1}\int_{ut\wedge\tau_{(1+\mu_{ut})}}^{ut}\mathrm{d}\gamma_s\right|\geq\eta\right]=\mathbb{P}_m\left[\left|\int_0^{0\vee\mathrm{Sup}\{u\,|\,u\leq\mathrm{Inf}\{v>0\,|\,X_v\notin\mathscr{D}\}\text{ et }X_u\in K\}}\mathrm{d}\gamma_s\right|\geq\eta t\right]$$

qui tend vers 0 lorsque $t\to\infty$, puisque la dernière intégrale est p.s. finie;

(ii) (i) montre que, au moins lorsque la loi de X_0 est m, on a: $t^{-1}\phi_{ut}\approx t^{-1}\sum_{k=2}^{\mu_{ut}}\psi^k$; de plus pour $\varepsilon>0$ on a:

$$\mathbb{P}_m\left[J_t^{\varepsilon}\cap\left\{\left|t^{-1}\sum_{k=2}^{\mu_{ut}}\psi^k-t^{-1}\sum_{k=2}^{v_{ut}^{\varepsilon}}\psi^k\right|>\eta\right\}\right]$$

$$\leq\mathbb{P}_m\left[\sup_{u_{ut}^{\varepsilon}<p<v_{ut}^{\varepsilon}}\left|\sum_{k=p}^{v_{ut}^{\varepsilon}}\psi^k\right|>\eta t\right]$$

$$=\mathbb{P}_m\left[\bigcup_{p=1}^{v_{ut}^{\varepsilon}-u_{ut}^{\varepsilon}}\left\{|C_p^0|>\eta t\right\}\right],$$ C^0 étant un processus de Cauchy de paramètre ρ

$$=\mathbb{P}_m\left[\bigcup_{p=1}^{v_{ut}^{\varepsilon}-u_{ut}^{\varepsilon}}\left\{|C_{p/t}^0|>\eta\right\}\right]\quad\text{par rééchelonnement}$$

$$\leq\mathbb{P}_m[\mathrm{Inf}\{s>0\,|\,|C_s^0|>\eta\}\leq t^{-1}(v_{ut}^{\varepsilon}-u_{ut}^{\varepsilon})]\xrightarrow[t\to\infty]{}\mathbb{P}_m[\mathrm{Inf}\{s>0\,|\,|C_s^0|>\eta\}$$

$$\leq 2\alpha u\varepsilon],$$

et donc par continuité à droite en 0 de C^0 et par le Lemme 9 on a:

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\limsup_{t\to\infty}\mathbb{P}_m\left[\left|t^{-1}\sum_{k=2}^{\mu_{ut}}\psi^k-t^{-1}\sum_{k=2}^{v_{ut}^{\varepsilon}}\psi^k\right|>\eta\right]=0;$$

(iii) (i), (ii), la définition 10 et la Proposition 2 font que pour p dans $\mathbb{N}$, $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_p$ dans $\mathbb{R}$ et $b_1, \dots, b_p$ réels, on a:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_m \left[\exp\left(\mathrm{i} \sum_{q=1}^{p} b_q (t^{-1}\phi_{u_q t} - t^{-1}\phi_{u_{q-1}t}) \right) \right]$$

$$= \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_m \left[\exp\left(\mathrm{i} \sum_{q=1}^{p} b_q t^{-1} \left(\sum_{k=2}^{\mu_{u_q t}} \psi^k - \sum_{k=2}^{\mu_{u_{q-1}t}} \psi^k \right) \right) \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \limsup_{t \to \infty} \mathbb{E}_m \left[\exp\left(\mathrm{i} \sum_{q=1}^{p} b_q t^{-1} \sum_{k=1+v^{\varepsilon}_{u_{q-1}t}}^{v^{\varepsilon}_{u_q t}} \psi^k \right) \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \limsup_{t \to \infty} \exp\left(-\sum_{q=1}^{p} |b_q| \rho t^{-1} (v^{\varepsilon}_{u_q t} - v^{\varepsilon}_{u_{q-1}t}) \right)$$

$$= \exp\left(-\rho\alpha \sum_{q=1}^{p} |b_q| (u_q - u_{q-1}) \right);$$

ce qui prouve la proposition dans le cas où la loi de X_0 est m;

(iv) Pour tous x dans $M \backslash (\mathscr{L} \cup \{x_0\})$ et $u, w, \eta > 0$, utilisant que $\varepsilon_x P_1 = f_x m$ avec $\| f_x \|_\infty \leq C < \infty$ ($f_x = V p_1(x, .)$ est continue sur M), on a:

$$\mathbb{P}_x [|t^{-1}(\phi_{w+tu} - \phi_{tu})| > \eta] = \mathbb{E}_x [\mathbb{P}_{X_{tu}} [|\phi_w - \phi_0| > \eta t]]$$

$$= f_x m P_{tu-1} [\mathbb{P}_{\cdot} [|\phi_w| > \eta t]] \leq C \mathbb{P}_m [|\phi_w| > \eta t] \xrightarrow[t \to \infty]{} 0;$$

soit

$$F^t(x) = \mathbb{E}_x \left[\exp\left(\mathrm{i} \sum_{q=1}^{p} b_q (t^{-1}\phi_{u_q t} - t^{-1}\phi_{u_{q-1}t}) \right) \right]$$

pour x dans $M \backslash (\mathscr{L} \cup \{x_0\})$ et b_q, u_q comme en (iii); ce qui précède montre que pour $w > 0$:

$$\lim_{t \to \infty} [F^t(x) - \varepsilon_x P_w(F^t)] = 0;$$

(v) Considérons maintenant la décomposition spectrale de Δ sur $L^2(M, m)$:

$$P_w = \mathrm{e}^{\Delta \cdot w/2} = \sum_{k \geq 0} \mathrm{e}^{\alpha_k \cdot w/2} \Pi_k;$$

les valeurs propres α_k, rangées par ordre décroissant, sont < 0 pour $k > 0$, et pour toute h de $L^2(M, m)$ $\Pi_0 h$ est constante, puisque les fonctions harmoniques sur M sont constantes; plus précisément, on a:

$$\Pi_0 h = m(\Pi_0 h) = \lim_{t \to \infty} m P_t h = m(h);$$

et donc utilisant à nouveau $\varepsilon_x P_1 = f_x m$:

$$|(\varepsilon_x P_{w+1} - m)(F^t)| = |\varepsilon_x P_1[(P_w - m)(F^t)]| \leq Cm(|(P_w - \Pi_0)(F^t)|)$$

$$\leq C \left\| \sum_{k\geq 1} e^{\alpha_k \cdot w/2} \Pi_k F^t \right\|_2 = C\left(\sum_{k\geq 1} e^{\alpha_k \cdot w} \| \Pi_k F^t \|_2^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq C e^{\alpha_1 \cdot w/2} \| F^t \|_2 \leq C e^{\alpha_1 \cdot w/2};$$

donc $\varepsilon_x P_w(F^t)$ converge uniformément en t lorsque $w \to \infty$ vers $m(F^t)$;

(vi) (iv) et (v) montrent que $F^t(x)$ a même limite en ∞ que $m(F^t)$, et (iii) donne exactement la limite de $m(F^t)$; la proposition est donc établie pour toute loi initiale de X ne chargeant pas $\mathscr{L} \cup \{x_0\}$. □

Corollaire 1. *$(t^{-1}\varphi_{ut})_{u\geq 0}$ converge au sens des distributions marginales de dimension finie, lorsque $t \to \infty$, vers un processus de Cauchy de paramètre $\rho\alpha$, et ce paramètre $\rho\alpha$ ne dépend pas de (R, ρ).*

Preuve. Par définition ϕ_t ne dépend pas de ρ, et la loi-limite de $t^{-1}\phi_t$ ne dépend pas de R non plus puisque pour $R' < R$ on a:

$$t \cdot \| t^{-1}(\phi_t^{R'} - \phi_t^R) \|_2^2 \leq \sup_{R' \leq G \leq R} \lambda^2 < \infty;$$

d'où la non-dépendance de $\rho\alpha$ par rapport à R et ρ; Notons ensuite:

$$\hat{\varphi}_t = \int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s) e^{-r_s} h_s g_s^{-1} \, dW_s, \qquad \bar{\varphi}_t = \int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s) \lambda_s h_s g_s^{-1} \, dW_s,$$

$$\varphi_t' = \int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s) \lambda_s \, dW_s;$$

remarquons encore une fois que tous les comportements asymptotiques considérés ici ne sont pas modifiés si on remplace $\mathscr{D}$ par D, à cause du Lemme 6 et car toutes les fonctions qui interviennent sont bornées dans $\{R' \leq r \leq R\}$; le Lemme 3 assure que $t^{-1}\varphi_t \approx t^{-1}\hat{\varphi}_t$, et le Lemme 10 que $t^{-1}\varphi_t' \approx t^{-1}\phi_t$; puis

$$\langle t^{-1}\hat{\varphi}_t - t^{-1}\bar{\varphi}_t \rangle = t^{-2} \int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s)(\lambda - e^{-r})_s^2 (hg^{-1})_s^2 \, ds$$

tend p.s. vers 0 à cause du théorème ergodique et du Lemme 7, d'où $t^{-1}\hat{\varphi}_t \approx t^{-1}\bar{\varphi}_t$; enfin,

$$\langle t^{-1}\varphi_t' - t^{-1}\bar{\varphi}_t \rangle = t^{-2} \int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s) \lambda_s^2 (hg^{-1} - 1)_s^2 \, ds$$

$$\leq \left[\sup_{\mathscr{D}} (hg^{-1} - 1)^2 \right] t^{-2} \int_0^t 1_{\mathscr{D}}(X_s) \lambda_s^2 \, ds,$$

d'où par le Lemme 2(ii) et la Proposition 1:

$$\lim_{R \searrow -\infty} \limsup_{t \to \infty} \langle t^{-1}\varphi'_t - t^{-1}\bar{\varphi}_t \rangle = 0;$$

étant donnée la disparition asymptotique de l'influence de R, ceci suffit à entraîner que $t^{-1}\varphi_t \approx t^{-1}\phi_t$. □

6. Des nombres de petits tours aux 1-formes différentielles

Soit $\hat{M}$ une sous-variété compacte de M, de classe C^3 et de codimension 2; nécessairement $\hat{M}$ est une réunion finie de lacets disjoints sans point multiple $\hat{M} = \mathscr{L}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{L}_n$.

Soit ω une 1-forme de classe C^2 sur $M' = M \backslash \hat{M}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, qu'on suppose fermée dans un voisinage pointé de $\hat{M}$.

Pour chaque $\mathscr{L}_j$ notons l^j sa longueur, et notons (r^j, ψ^j, z^j) le système de coordonnées cylindriques locales défini en (I), puis $D_j = \{r^j \le R\}$ et $K_j = \{r^j \le R - \rho\}$, R étant assez petit pour que les D_j soient deux à deux disjoints et pour que ω soit fermée dans chaque $D_j \backslash \mathscr{L}_j$.

Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux lacets inclus dans $D_j \backslash \mathscr{L}_j$ et d'indice ∓ 1 autour de $\mathscr{L}_j$, on sait par le théorème de Stokes que:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathscr{C}} \omega \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathscr{C}'} \omega \right|;$$

notons $c_j = c_j(\omega)$ cette quantité.

Remarque. Si $\mathscr{L}_j$ était une courbe compacte sans point multiple qui ne soit pas un lacet, on aurait $c_j(\omega) = 0$, et par suite la contribution asymptotique de $\mathscr{L}_j$ serait nulle.

Définition 11.

$$N_t^{\omega}(u) = \frac{1}{t} \int_0^{ut} \omega(X_s),$$

l'intégrale étant prise au sens de Stratonovitch le long des trajectoires de X. Une telle intégrale $\int_0^t \omega(X_s)$ est définie précisement en [10, déf 2.1], où elle est notée $\int_{X[0,t]} \omega$.

Remarque. $\hat{M}$ étant polaire, N_t^{ω} ainsi que les r_t^j, φ_t^j, Z_t^j de la Définition 4 (relatifs à $\mathscr{L}_j$) sont bien définis.

Montrons qu'on peut négliger asymptotiquement la contribution des formes soit sans singularité (Lemme 11) soit exactes (Lemme 12).

Lemme 11. $N_t^{\omega} \approx 0$ *dès que* ω *est de classe* C^2 *sur* M.

Preuve. Utilisons le Théorème 3.1 de [10]:

$$N_t = t^{-1}\int_0^t \sum_{k=1}^d \omega_k(R_s)\,\mathrm{d}B_s^k - (2t)^{-1}\int_0^t \delta\omega(X_s)\,\mathrm{d}s \quad \text{p.s.},$$

où R_s est un relèvement de X_s dans le fibré $O(M)$, où ω_k est une fonction C^2, donc bornée lorsque M est compacte, et où δ est l'opérateur de divergence. Or d'une part

$$\left\| t^{-1}\sum_{k=1}^d \int_0^t \omega_k(R_s)\,\mathrm{d}B_s^k \right\|_2^2 = t^{-2}\int_0^t \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^d \omega_k^2(R_s)\right)\mathrm{d}s \le C/t,$$

et d'autre part

$$t^{-1}\int_0^t \delta\omega(X_s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} \int_M \delta\omega\,\mathrm{d}m$$

à cause du théorème ergodique; ce qui entraîne que $N_t \approx 0$, puisque m vérifie:

$$\forall F \in C^2(M) \quad \int_M \Delta F\,\mathrm{d}m = 0$$

et qu'utilisant la décomposition de De Rham [4, §31, corollaire 1] de ω sur M on a $\delta\omega = \Delta F$. □

Lemme 12. $t^{-1}F(X_t) \approx 0$ *pour toute fonction F finie* m-p.p. sur M.

Remarque. Ceci fait que $N_t \approx 0$ si ω est exacte, et donc que le théorème porte en fait sur l'espace de cohomologie $H^1(M')$.

Preuve. Utilisant à nouveau la fonction f_x utilisée déja pour la Proposition 3(iv), on a:

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty} \mathbb{P}_x(|t^{-1}F(X_t)| \ge \varepsilon) &\le \lim_{s\to+\infty}\searrow \limsup_{t\to+\infty} \mathbb{P}_x(|F(X_t)| \ge \varepsilon s)\\
&= \lim_{s\to+\infty} \limsup_{t\to+\infty} \varepsilon_x P_t 1_{\{|F|\ge \varepsilon s\}}\\
&= \lim_{s\to+\infty} \limsup_{t\to+\infty} \varepsilon_x P_1 P_t 1_{\{|F|\ge \varepsilon s\}}\\
&= \lim_{s\to+\infty} \limsup_{t\to+\infty} f_x m P_t 1_{\{|F|\ge \varepsilon s\}}\\
&\le C \lim_{s\to+\infty} m(\{|F| \ge \varepsilon s\}) = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposition 4.

$$N_t^{\omega}(u) \approx \sum_{j=1}^n c_j(\omega)\,t^{-1}\varphi_{ut}^j.$$

Preuve. Fixons une fonction h décroissante de classe C^3 sur $[-\infty, 1+R[$, égale à 1 sur $[-\infty, R-\rho]$ et nulle sur $[R, 1+R[$, et posons

$$\omega^j = h(r^j)1_{D_j} \times \omega \quad \text{pour } 1 \le j \le n,$$

puis

$$\omega^j = H^j(r^j, \psi^j, z^j)\,\mathrm{d}r^j + \Gamma^j(r^j, \psi^j, z^j)\,\mathrm{d}\psi^j + L^j(r^j, \psi^j, z^j)\,\mathrm{d}z^j;$$

posons encore

$$N_t^j(u) = t^{-1}\int_0^t \omega^j(X_s), \qquad F^j(r^j, \psi^j) = 1/\ell^j \int_0^{\ell^j} L^j(r^j, \psi^j, z)\,\mathrm{d}z,$$

$$q^j(r^j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma^j(r^j, \psi, 0)\,\mathrm{d}\psi.$$

Faisons d'abord une série de remarques:

(i) $\omega - \sum_{j=1}^n \omega^j$ est de classe C^2 sur M, et donc le Lemme 11 assure que

$$N_t^\omega(u) \approx \sum_{j=1}^n N_t^j(u);$$

(ii) H^j, Γ^j et L^j sont de classe C^2 sur $\mathrm{M}\backslash\mathscr{L}_j$ et nuls hors de D_j;

(iii)

$$N_t^j(u) = t^{-1}\int_0^{ut} [H_s^j \circ \mathrm{d}r_s^j + \Gamma_s^j \circ \mathrm{d}\psi_s^j + L_s^j \circ \mathrm{d}z_s^j];$$

(iv) ω^j a été choisie pour isoler la singularité de ω sur $\mathscr{L}_j$, tout en restant suffisamment régulière; plus précisément, le petit calcul suivant, qu'on utilisera ci-dessous, montre que $\mathrm{d}\omega^j$ est de classe C^2 (et non seulement C^1) sur M, ce qui permet de lui appliquer le Lemme 11; en effet, écrivant $\omega = H_0^j \mathrm{d}r^j + \Gamma_0^j \mathrm{d}\psi^j + L_0^j \mathrm{d}z^j$ dans $D_j\backslash\mathscr{L}_j$, on tire de la fermeture de ω dans $D_j\backslash\mathscr{L}_j$ que

$$\frac{\partial \Gamma^j}{\partial r^j} - \frac{\partial H^j}{\partial \psi^j} = h' \times \Gamma_0^j, \qquad \frac{\partial L^j}{\partial r^j} - \frac{\partial H^j}{\partial z^j} = h' \times L_0^j, \qquad \frac{\partial L^j}{\partial \psi^j} - \frac{\partial \Gamma^j}{\partial z^j} = 0$$

sont de classe C^2 sur M et nulles hors de $D_j\backslash K_j$;

(v) Utilisant (iv), on a:

$$\frac{\partial q^j}{\partial r^j}(r^j) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} h'(r^j)\Gamma_0^j(r^j, \psi, 0)\,\mathrm{d}\psi,$$

$$\frac{\partial F^j}{\partial r^j}(r^j, \psi^j) = 1/\ell^j \int_0^{\ell^j} h'(r^j)L_0^j(r^j, \psi^j, z)\,\mathrm{d}z, \qquad \frac{\partial F^j}{\partial \psi^j}(r^j, \psi^j) = 0;$$

(vi) q^j est de classe C^2 sur $M\backslash\mathscr{L}_j$ et vaut $c_j(\omega)$ sur $K_j\backslash\mathscr{L}_j$ et 0 sur $M\backslash D_j$; F^j est de classe C^2 sur $M\backslash\mathscr{L}_j$ et vaut une constante $c_j'(\omega)$ sur $K_j\backslash\mathscr{L}_j$ et 0 sur $M\backslash D_j$.

Intégrons maintenant par parties l'intégrale de Stratonovitch, à partir de (iii); on obtient (en laissant tomber l'indice j qui en fait figure partout):

$$N_t(u) = t^{-1}\int_0^{ut}\bigg[H_s\circ \mathrm{d}r_s + \Gamma_s\circ \mathrm{d}\psi_s + d\bigg(\int_0^{z_s} L(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z\bigg)$$

$$-\bigg(\int_0^{z_s}\frac{\partial L}{\partial r}(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z\bigg)\circ \mathrm{d}r_s - \bigg(\int_0^{z_s}\frac{\partial L}{\partial \psi}(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z\bigg)\circ \mathrm{d}\psi_s\bigg]$$

$$= t^{-1}\int_0^{ut}\bigg(H_s - \int_0^{z_s}\frac{\partial H}{\partial z}(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z\bigg)\circ \mathrm{d}r_s$$

$$+ t^{-1}\int_0^{ut}\bigg(\Gamma_s - \int_0^{z_s}\frac{\partial \Gamma}{\partial z}(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z\bigg)_s\circ \mathrm{d}\psi_s$$

$$- t^{-1}\int_0^{ut}\bigg(\int_0^{z_s} h'(r_s)L_0(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z - z_s/\ell\int_0^{\ell} h'(r_s)L_0(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z\bigg)\circ \mathrm{d}r_s$$

$$- t^{-1}\int_0^{ut}\bigg(z_s/\ell\int_0^{\ell} h'(r_s)L_0(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z\bigg)\circ \mathrm{d}r_s$$

$$+ t^{-1}\int_0^{ut} d\bigg(z_s/\ell\int_0^{\ell} L(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z\bigg)$$

$$+ t^{-1}\int_0^{ut} d\bigg(\int_0^{z_s} L(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z - z_s/\ell\int_0^{\ell} L(r_s,\psi_s,z)\,\mathrm{d}z\bigg)\quad \text{par (iv)}$$

$$\approx t^{-1}\int_0^{ut}[H(r_s,\psi_s,0)\circ \mathrm{d}r_s + \Gamma(r_s,\psi_s,0)\circ \mathrm{d}\psi_s] + t^{-1}\int_0^{ut} F_s\circ \mathrm{d}z_s \quad \text{par (v) et}$$

les Lemmes 11 et 12

$$\approx t^{-1}\int_0^{ut}[H(r_s,\psi_s,0)\circ \mathrm{d}r_s + \Gamma(r_s,\psi_s,0)\circ \mathrm{d}\psi_s]\quad \text{par (vi) et le Lemme 11}$$

$$= t^{-1}\int_0^{ut} H(r_s,\psi_s,0)\circ \mathrm{d}r_s + t^{-1}\int_0^{ut}\bigg[d\bigg(\int_0^{\psi_s}\Gamma(r_s,\psi,0)\,\mathrm{d}\psi\bigg)$$

$$-\bigg(\int_0^{\psi_s}\frac{\partial \Gamma}{\partial r}(r_s,\psi,0)\,\mathrm{d}\psi\bigg)\circ \mathrm{d}r_s\bigg]$$

$$= t^{-1}\int_0^{ut}\bigg(H(r_s,\psi_s,0) - \int_0^{\psi_s}\frac{\partial H}{\partial \psi}(r_s,\psi,0)\,\mathrm{d}\psi\bigg)\circ \mathrm{d}r_s$$

$$- t^{-1}\int_0^{ut}\bigg(\int_0^{\psi_s} h'(r_s)\Gamma_0(r_s,\psi,z)\,\mathrm{d}\psi - \psi_s/2\pi\int_0^{2\pi} h'(r_s)\Gamma_0(r_s,\psi,z)\,\mathrm{d}\psi\bigg)\circ \mathrm{d}r_s$$

$$- t^{-1}\int_0^{ut}\left(\psi_s/2\pi\int_0^{2\pi} h'(r_s)\Gamma_0(r_s,\psi,z)\,\mathrm{d}\psi\right)\circ \mathrm{d}r_s$$

$$+ t^{-1}\int_0^{ut} d\left(\psi_s/2\pi\int_0^{2\pi}\Gamma(r_s,\psi,0)\,\mathrm{d}\psi\right)$$

$$+ t^{-1}\int_0^{ut} d\left(\int_0^{\psi_s}\Gamma(r_s,\psi,0)\,\mathrm{d}\psi - \psi_s/2\pi\int_0^{2\pi}\Gamma(r_s,\psi,0)\,\mathrm{d}\psi\right) \quad \text{par (iv)}$$

$$\approx t^{-1}\int_0^{ut} H(r_s,0,0)\circ \mathrm{d}r_s + t^{-1}\int_0^{ut} q(r_s)\circ \mathrm{d}\psi_s \quad \text{par (v) et les Lemmes 11 et 12}$$

$$= t^{-1}\int_{r_0}^{r_{ut}} H(r,0,0)\,\mathrm{d}r + t^{-1}\int_0^{ut} q(r_s)\,\mathrm{d}\psi_s \quad \text{car d'après le Lemme 3(i)}$$

$\langle \mathrm{d}r_s, \mathrm{d}\psi_s\rangle = 0$

$$\approx t^{-1}c(\omega)\varphi_{ut} + t^{-1}\int_0^{ut}(q(r_s) - c(\omega)1_D(X_s))\,\mathrm{d}\psi_s \quad \text{par le Lemme 12 et la}$$

Définition 4; enfin

$$\left\| t^{-1}\int_0^{ut}(q(r_s) - c(\omega)1_D(X_s))\mathrm{e}^{-r_s}h_s g_s^{-1}\,\mathrm{d}W_s\right\|_2^2 \le Cu/t \quad \text{par (vi)},$$

$$t^{-1}\int_0^{ut}(q(r_s) - c(\omega)1_D(X_s))\mathrm{e}^{-r_s}a_s\mathrm{d}s \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} u\int_D (q(r) - c(\omega))\mathrm{e}^{-r}a\,\mathrm{d}m = 0$$

par le théorème ergodique et le Lemme 2(v),
et donc d'après le Lemme 3(i), $N_t(u) \approx c(\omega)t^{-1}\varphi_{ut}$. □

Théorème. $(N_t^{\omega}(u))_{u\ge 0}$ *converge au sens des distributions marginales de dimension finie, lorsque* $t \to +\infty$, *vers le processus* $\sum_{j=1}^n c_j(\omega)C^j$, *où les* C^j *sont* n *processus de Cauchy indépendants de paramètre* $\rho\alpha_j$; *et cette convergence est conjointe pour toute famille finie de formes* ω *(liées à* M'*).*

Remarque. Lorsque les c_j sont réels, $\sum_{j=1}^n c_jC^j$ est un processus de Cauchy de paramètre $\sum_{j=1}^n |c_j|\rho\alpha_j$. Bien sûr, α_j est α relatif à $(K_j, \mathscr{D}_j)$.

Preuve. Il s'agit d'appliquer la Proposition 4 et le Corollaire 1, en s'assurant que la convergence qu' énonce le corollaire 1 est valable conjointement pour les différents φ_{ut}^j; pour cela, il suffit que la convergence soit conjointe dans la Proposition 3; or ceci a clairement lieu si la Proposition 2 s' étend à toutes les variables $\psi^{k,j}$, $k \ge 2$ et $1 \le j \le n$, où bien sûr $\psi^{k,j}$ est ψ^k relative à $(K_j, \mathscr{D}_j)$; mais on constate aussitôt que la preuve de la Proposition 2 s'adapte sans difficulté à ce cas, en distingant seulement pour la récurrence suivant la valeur de l'indice j de la dernière des excursions $[\tau_m^j, \zeta_m^j]$. □

Ajouté sur épreuves. Le calcul du paramètre $\rho\alpha_j$ figurera dans un prochain article, en collaboration avec Y. Le Jan, on trouve $\rho\alpha_j = \pi\ell^j/V$.

Bibliographie

[1] J. Azema, M. Duflo and D. Revuz, Propriétés relatives des processus de Markov récurrents, ZFW 13 (1969) 286–314.

[2] M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, Le spectre d'une variéte riemannienne, Lecture notes no. 194 (Springer, Berlin, 1971).

[3] K. Burdzy, J.W. Pitman and M. Yor, Some asymptotic laws for crossings and excursions, Astérisque no 157–158, 59–74, colloque P. Lévy 1988.

[4] G. De Rham, Variétés différentiables (Hermann, Paris, 1960).

[5] J. Franchi, Produits semi-directs de diffusions réelles et lois asymptotiques, Adv. Appl. Prob. 21 (1989) 756–769.

[6] J. Franchi, Théorème des résidus asymptotique pour le mouvement brownien sur une surface riemannienne compacte, Ann. Inst. H. Poincaré 27 (1991) 445–462.

[7] Y. Guivarc'h and Y. Le Jan, Asymptotic winding of the geodesic flow on modular surfaces and continuous fractions, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4° série, t. 26, 23–50, 1993.

[8] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces (Academic press, New York, 1962).

[9] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. III (Springer, Berlin, 1985).

[10] N. Ikeda and S. Manabe, Integral of differential forms along the path of diffusion processes, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 15 (1979) 827–852.

[11] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic différential equations and stochastic processes. (Kodansha North Holland Mathematical Library, 1981).

[12] S. Ito, The fundamental solution of the parabolic equation in a differentiable manifold, Osaka Math. J 5 (1953) 75–92.

[13] J.F. Le Gall and M. Yor, Etude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift, Probab. Theory Rel. Fields **71** (Springer, Berlin, 1986) pp. 183–229.

[14] J.F. Le Gall and M. Yor, Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l'espace, Trans. AMS 317 (1990) 687–722.

[15] T. Lyons and H.P. McKean, Windings of the plane Brownian motion, Adv. Math. 51 (1984) 212–225.

[16] S. Manabe, On the intersection number of the path of a diffusion and chains, Proc. Japan Acad. 55 (Ser. A) (1979).

[17] S. Minakshisundaram, and A. Pleijel, Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds, Can. J. Math. 1 (1949) 242–256.

[18] J.W. Pitman and M. Yor,Further asymptotic laws of planar Brownian motion, Ann. Probab. 17 (1989) 965–1011.

[19] F. Spitzer, Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958) 187–197.

[20] N.T. Varopoulos, Brownian motion can see a knot, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985) 299–309.