

紹 介 Reviews

**R. V. Southwell, and H. B. Squire:**  
**A Modification of Oseen's Approximate Equation for the Motion in Two Dimensions of a Viscous Incompressible Fluid** (粘性不圧の流體の二次元運動に對するオゼーンの近似式の修正). Philo. Trans. of the Roy. Soci. of London Vol. 232, 1933.

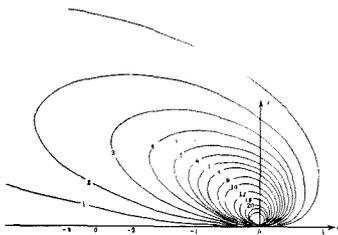
**I. 緒 論**

此論文は固定せる圓筒體を過ぎる流體の有限粘性にて不壓なる場合の二次元の定常流を取扱つたものであり、應用としては航空學の aerofoil theory (風板の理論)に於ける profile drag の計算に重要な役割をなす。偕て二次元の不圧の定常流に於て渦性  $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  及流函数  $\psi$  (即ち  $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ) を用ひるときは運動及連續の式は外力  $X=Y=0$  とし、

$$\zeta = \nabla^2 \psi \dots i \quad u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \nabla^2 \zeta \dots ii \dots (1)$$

第 1 圖  $(\zeta_2 = 2 \sum \varepsilon \frac{\beta}{r} e^{-\alpha} K_1(r) \text{ の分布})$

$$\sum \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$



と示される。境界條件として圓筒の周圍に於て (a) 速度零となり無限の距離に於て (b) 定流 ( $U$ ) ありと假定する、即ち

$$(a) \dots \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$(b) \dots \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -U.$$

Oseen の近似式は (1) 式の ii に於て左邊の二次的項を省略し流體の攪亂せられざる渦性の式

$$U \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \nu \nabla^2 \zeta$$

に基いて論じてゐる。而して著者等は尙流體の攪亂せられたる場合に適する様に、次の如き準備を試みた。今  $\alpha$  を或る平面調和函数とし

$$u = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \alpha}{\partial y} \text{ と示し, } \chi = e^{\alpha/\nu}$$

と置けば (1) 式は

$$\zeta = \nabla^2 \psi \dots i, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \zeta = 0 \dots ii \dots (2)$$

なる形になる。此式の解は  $\alpha$  の絶對の大きさに關係する。即ち Reynold's number の増加に従ひ流れの型の變化の計算を行へば良い。Reynold's number の小さい時 ( $\nu$  が大きいか非渦動流が小さい時) は遅い流體の運動の式として近似的に  $\Delta^2 \zeta = 0$  にて示される。亦 Reynold's number の大きいとき ( $\nu$  が小さいか非渦動流が大きいとき) は次の極限の式に近づく

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

偕て次に  $\beta$  を  $\alpha$  の共軛平面調和函数とせば  $\beta$  常數線は非渦動の場合の流線であらねばならぬ。

即ち  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}$  なる關係を用ひ (2) 式は

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \psi = \frac{\zeta}{h^2} \dots i$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \chi \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \chi \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \zeta = 0 \dots ii \dots (3)$$

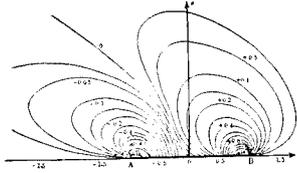
と書直される。此處に  $h^2 = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \cdot \chi = e^{\alpha/\nu}$  である。従つて境界條件は

(a)  $\beta = 0$  なるときは  $\psi = 0$ , 圓筒の輪郭を示す  $\beta = 0$  の線の部分にては  $\frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0$  である。  
 ... 圓筒の周圍の條件。

(b)  $\psi = \beta$  ... 無限の距離に於ける條件、となる。以上の準備をして實際應用の解法を次に示してゐる。

第 2 圖  $(\zeta = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sigma(\alpha') \varepsilon \{(\alpha - \alpha'), \beta\} d\alpha' \text{ の分布})$

$\sigma(\alpha') = (\alpha')^3$  の場合に於て  $z(\alpha, \beta) = \xi_2$  なり.



II. 薄き平板を過ぎる流れに対する近似式の解法

平板は攪亂せられざる流れの方向に横はり、 $z$  の方向に無限の長さを有し、 $x$  の方向に有限の幅を有し、厚さは零とす。非渦動流は  $x$  の方向に一定の速度  $U$  なりとす。然らば  $\alpha = -Ux, \beta = -Uy, h^2 = U^2$  となり、平板上にては  $\beta = 0$  で平板の幅  $L$  は  $\beta = 0$  の線上に  $\alpha = \alpha_1$  より  $\alpha = \alpha_2$  迄占有す。即ち  $\alpha_1 - \alpha_2 = UL$  であり、Reynold's number は  $R = \frac{UL}{\nu} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\nu}$  にて與へられる。

今境界條件 (b) を満足する  $\psi$  の完全解を

$$\psi = \beta + \psi_1 \dots \dots \dots (4)$$

とし、此處に  $\psi_1$  は  $\beta = 0$  にて零となる可き (3) 式の解である。亦 (a) の條件よりは  $\beta = 0$  の線上にて  $\alpha_1 > \alpha > \alpha_2$  の範圍に於て

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} = -1 \dots \dots \dots (5)$$

なるを要する。然して今  $\nu = \frac{1}{2}$  と置き (3) 式は

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \psi = \frac{\xi}{U^2} \dots \dots i$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \xi = 0 \dots \dots ii \dots \dots (6)$$

と示され  $R = 2(\alpha_1 - \alpha_2)$  となり以上の ii 式の解として

$$\xi_1 = e^{-\alpha} K_0(r) \dots \dots \dots (7)$$

を得る。此處に  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 、 $K_0(r)$  は第二種の虚數因子を含む圓筒函数である。此の  $\xi_1$  は  $\alpha = 0, \beta = \varepsilon$  なる點に源を有する渦性である。次に一對の渦性(doublet of vorticity)に適する解を  $\xi_2$  とし、 $(\alpha = 0, \beta = \varepsilon)$  の點に於ける渦性は  $\Sigma$  なる正勢力を有し  $(\alpha = 0, \beta = -\varepsilon)$  の點に於て  $-\Sigma$  なる負勢力を有すとせば此の正及負の源に對する渦性を組合せるに今  $\varepsilon$  は無限に小さい値を取り然し  $\varepsilon \Sigma$  は有限を保つとせば

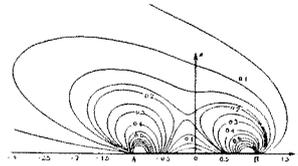
$$\xi_2 = \sum e^{-\alpha} L t_{\varepsilon=0} \left[ 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} K_0(r_1) \right]$$

$$= 2 \sum \varepsilon \frac{\beta}{r} e^{-\alpha} K_1(r) \dots \dots \dots (8)$$

と示される。 $r \rightarrow 0$  となれば  $\xi_2 \rightarrow \beta / (\alpha^2 + \beta^2)$  となり  $\beta = 0$  の線上にては  $\xi_2 = 0$  となる亦  $r \rightarrow \infty$  となれば  $\xi_2 \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta e^{-(\gamma + \alpha)}}{r^{\frac{3}{2}}}$  となる。第 1 圖に  $\xi_2$

の解の性質を圖示せり。 $\beta$  の負の値に對して  $\beta = 0$  の線の反對側に對象的に示される。Scale は  $U = -1$  とし  $R = 2$  としてある。

第 3 圖 ( $\xi$  の分布)  $\sigma(\alpha') = (\alpha')^4$  の場合



次に一對の渦性が平板の兩端に於て同符號又は異符號の値が  $\beta = 0$  線に沿ひ次々に勢力の變化する場合を示してある。即ち今  $\alpha = \pm \alpha_1$  の間に於て  $\beta = 0$  の線上の  $(\alpha', 0)$  點の一對の渦性の勢力を  $\sigma(\alpha')$  とし、此限界の外側にては零とせば  $(\alpha, \beta)$  點に於ける渦性は

$$\xi = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \sigma(\alpha') z \{(\alpha - \alpha'), \beta\} d\alpha' \dots \dots (9)$$

にて與へらる。此處に  $z(\alpha, \beta)$  は  $\xi_2$  と同じものである。此式の計算は圖又は近似的數量計算法にて容易に求め得らる。今  $-1 < \alpha < 1$  の範圍にて  $\beta = 0$  の線の部分 (圖にては AB) に於て一對の渦性の勢力が常數一次、二次、三次、四次に分布せられた場合を求めてある第 2 及第 3 圖に三次及四次的變化の場合を例示した此等圖にて 0 點に於て  $\xi = 0$  となり A 及 B 點にて  $\xi = \pi$  (or  $-\pi$ ) なる値としてある。次に流函数  $\psi$  の誘導を試み (6) 式の i より (a), (b) なる境界條件を満足する  $\psi$  を求めてある。即ち今  $(\alpha', \beta')$  點に於ける渦性を  $\xi(\alpha', \beta')$  とし  $r^2 = (\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2$  にて示せば

$$\psi = \frac{1}{2\pi U^2} \iint \xi(\alpha', \beta') \log r d\alpha' d\beta' \dots (10)$$

となる。而して  $\beta = 0$  の線上に於ては

$$-\left( \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right)_{\beta=0} = \frac{1}{2\pi U^2}$$

$$\times \iint \xi(\alpha', \beta') \frac{\beta'}{(\alpha - \alpha')^2 + \beta'^2} d\alpha' d\beta'$$

と示され此式の積分は既に求めたる  $\zeta$  の平面曲線圖(第2及第三圖等)を用ひ圖計算法に依り容易に求められる。實驗計算には  $-3 < \alpha < 1.5$ ,  $-2.5 < \beta < 2.5$  の範圍に對して積分を行ひ境界條件  $\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} = -1$  が  $\alpha = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$  なる五點に於て満足する如くせば結局速度  $U_1$  は以上各點に於ける速度を  $(u)_0, (u)_1, \text{etc.}$  とし,

$$u_1 = a_0(u)_0 + a_1(u)_1 + a_2(u)_2 + a_3(u)_3 + a_4(u)_4 \dots \dots \dots (11)$$

なる近似式に於て  $a_0 = 0.3158, a_1 = -0.1853, a_2 = -0.829, a_3 = 0.863, a_4 = 2.290$  と定められる。

以上の近似的解法に於て  $u_1$  の變化が平板の端に於て約 13% の異ひを生ずるが全體としては誤差は小さい。尙誤差の起る可能性として次の三項が指示される。

1).  $\zeta$  の解より數量的積分に依り渦性分布を求めた事。此原因に依る誤差は小さく亦不規則なれば渦性の圖を引く時に平滑されると思はる。

2). (10) 式の積分に於て平板の極く近くの範圍に就いて圖的に  $(u)_0, (u)_1, \dots \text{etc.}$  なる量を求めた事である。此誤差に對しては Bairstow の與へた數式的解を一對の渦性の勢力  $\sigma(\alpha')$  が  $-1 < \alpha < 1$  の限界に分布せられる場合に適用せば

$$u_1 = \int_{-1}^1 \sigma(\alpha') d\alpha' \left\{ 2e^{-(\alpha-\alpha')} K_0(r') + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ e^{-(\alpha-\alpha')} K_0(r') + \log r' \right] \right\}$$

となる。此の式の積分は Simpson の方法を用ひ計算される。此式に依る結果と前に圖的積分にて求めた方法と比較すると最大約 2% の違ひで分布も不規則となつてゐるから、重要視する必要はない。

3).  $-1 < \alpha < 1$  の限界に於て  $u_1 = -1$  なる條件を満足する點が平板上五點しか撰ばなかつた事。當然此條件を満す點を増す事に依り誤差は小さくなし得るに相違なきも實際計算上至難である。然し此等の點を不等距離に撰んだとても正確度を増す事は出來得ない。

**III. 圓筒體を過ぎる流れに對する近似式の解法**

緒論に於て示した(3)式及(a),(b)なる條件を満す流體の圓筒を過ぎる運動は平板の場合に取扱つた結果を座標變換に依り求められる。即ち  $\alpha +$

$i\beta = f(z)$  とし此處に  $z = x + iy$  を示す。而し圓筒の場合には  $v = 1/2$  とせば

$$\alpha + i\beta = U \left( 2 + \frac{\alpha^2}{z} \right) \dots \dots \dots (12)$$

にて示され此處に  $U$  は無限の距離に於ける流速で  $(x = \pm a, y = 0)$  に於て  $\alpha = \pm 2Ua$  となる。斯様な變更座標に依り渦性の分布を圖示してゐる亦一對の渦性の勢力が圓筒の場合には  $\sigma(\alpha) = (1 - \alpha^2)\alpha^n$  にて變化するとして  $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$  の三點に於て  $u_2 = -1$  となる條件を満す様に近似解を試み全く平板の場合と同様の論法を繰返してゐる。

**IV. 結 論**

結論に於て圓筒體及平板の流體に依り受ける抵抗力を計算してゐる。即ち  $O_x$  を圓筒又は平板の對象的面に沿ひ流れに逆ぶ方向とし、 $ds$  を此等の表面の elements とせば所要の抵抗力は

$$D = \int y \frac{\partial p}{\partial s} ds + \mu \int \zeta \frac{\partial x}{\partial s} ds \dots \dots \dots (13)$$

にて示される。別に運動の式より

$$\begin{aligned} -v\zeta &= v\nabla^2 u - \frac{\partial \chi}{\partial x} & \chi &= \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\ u\zeta &= v\nabla^2 v - \frac{\partial \chi}{\partial y} & & \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

であるから、緒論に於ける如く  $u = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}, v = -\frac{\partial \alpha}{\partial y}$  とし亦  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}$  等なる關係を用ひ  $(x, y)$  の座標系を  $(\alpha, \beta)$  の座標系に(14)式を直し

$$\begin{aligned} -v \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} &= \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ \zeta + v \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \end{aligned} \dots \dots \dots (15)$$

を得る。偕て圓筒及平板の表面に於て  $u = v = 0$  なる條件より  $\chi = \frac{p}{\rho}$  となり(15)式の關係を(13)式に代入し結局抵抗力は

$$D = \mu \left( \int -y \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} d\alpha + \int \zeta dx \right) \dots \dots (16)$$

にて示される。偕て平板の場合には(16)式に於て平板の厚さが無限に小さいと考へ

$$D = \mu \int \zeta dx \dots \dots \dots (17)$$

となる。此積分は §II に於て求めた如く圖表的に得られる。結局  $D=1.563 \rho U^2 L$  となる。此處に  $\rho$  は密度  $U$  は定流  $L$  は平板の幅の長さである。且つて Bairstow, Cave 及 Lang 等の結果は  $D=1.527 \rho U^2 L$  であり約  $2\frac{1}{2}\%$  の差がある。圓筒の場合には (16) 式より結局  $D=3.825 \rho U^2 d$  となり、此處に  $d$  は圓筒の直径を示す。  $R=\frac{Ud}{v}=2$  にては  $D=7.65 \mu U$  となる。亦 Lamb は Oseen の方法より  $D=\frac{4\pi\mu U}{\frac{1}{2}-\gamma-\log\frac{R}{8}}$  と出してゐる此式よりは  $R=2$  とし  $D=9.60 \mu U$  となる。亦 Bairstow の結果は  $R=2$  として  $D=8.24 \mu U$  となる。即ち本論文の著者等の得た結果は Lamb のよりは約 20% Bairstow よりは 7% 小さく出てゐる。Eisner, Wieselsberger 及 Bairstow 等の實驗の結果は一般に以上の係數値は理論より出したものより小さく出てゐる。故に著者の結果が Lamb 及 Bairstow の結果よりより進歩的な事を裏書してゐる。(紹介者附言) 流體の disturb された場合に對する渦性の式を解く場合に常法にて得難きものを斯様の近似的積分法より求め可成迄實際現象の事實と一層接近してゐる。氣象學の方面にも渦動論の研究に此等の方法が可成役立つと思はれる。(石丸雄吉)

J. E. Sears and J. S. Clark: A New Primary Standard Barometer (新準基晴雨計). Proc. of the Roy. Soc., A. Vol. 139, 1933.

### 1. 序 論

1854 年に Kew Observatory で Welsh が primary standard barometer を作つた。これは 1.1 時の内徑の硝子管を用ひて、水銀柱の高さは cathetometer を用ひ、下端は水銀面に鋼針を接する様にし、上端は cross wire に會はせて讀み取つた。萬國度量衡局では 1880 年に Wild が年月を経つに従つて上部に出て來る瓦斯や蒸氣を取る簡単な装置のついたものを考案した。溫度は晴雨計に接した水銀中に寒暖計を入れて讀み meniscus は矢張り直接讀みとつた。Marek

の考案により Wild が改良したものは水銀面の近くに、水平の wire の image を作り、それとそれの水銀面による反射の virtual image との讀みの平均を以て水銀面の高さとした。英國ではこの仕事は 1912 から Kew より N. P. L. に移され、大型の Fortin type のものが出來た。その後 Sir George Beilly がこれを繼續したが、世界大戰の爲に中止した。以上のものは總て硝子管を用ひた爲に光學的に不完全であり、又水銀や硝子の面の汚れを取る事が六ヶ敷かつた。

### 2. New primary standard barometer の構造

第一圖の如き stainless steel の U 字管を作り、その上端は mercury vapour condensation pump につなぐ。このつなぎ B には水銀を入れて pump の vibration が晴雨計に傳はらぬ様にする。他の端は C で大氣とつながつて居る。meniscus の部分には光學的に平面平行な硝子をはめた窓を作り、水銀柱の高さは第二圖の K 臺に取りつけられた micrometer microscope L を水銀柱に平行に置かれた標準尺度の S の所まで水平

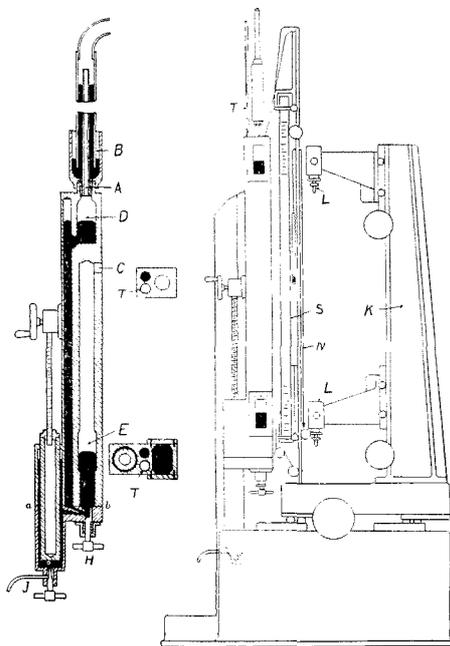


Fig. 1.

Fig. 2.