

Chapter 4

EQUATIONS APPROCHEES DE LA REFRACTION DE LA HOULE

F. BIESEL

Directeur Scientifique à la SOGREAH

-

INTRODUCTION

En 1951, au Symposium sur les ondes de gravité, organisé par le National Bureau of Standards, j'ai présenté une étude sur les équations approchées de la houle en profondeur variable [1]. Cette étude était limitée aux problèmes plans (houles cylindriques) mais j'indiquais que la méthode pouvait être étendue aux cas tridimensionnels. Les formules auxquelles on aboutissait alors pour ces cas, justifiaient à titre de première approximation, la pratique usuelle de construction et d'interprétation des plans de vagues ; elle introduisait néanmoins un certain nombre de corrections qui pouvaient en gros se grouper en trois catégories :

- des déformations des houles identiques en substance à celles obtenues pour le cas bi-dimensionnel,

- des corrections d'amplitude,

- des corrections de longueur d'onde.

Les effets de la première catégorie ont été étudiés dans l'article cité plus haut. Ceux de la deuxième catégorie ne sont pas significatifs à l'ordre de précision retenu. Par contre, les effets de la troisième catégorie peuvent avoir une certaine importance pratique du fait de leur aspect "cumulatif". En effet, des variations de longueur d'onde, même petites n'ont pas uniquement un effet local mais sont susceptibles de déformer l'ensemble d'un diagramme de réfraction. Cependant, la précision que l'on pouvait atteindre par le tracé *graphique* des épures de réfraction ne permettait guère l'utilisation pratique de ces résultats. Ceci est la raison pour laquelle je m'étais jusqu'ici, abstenu de les publier, leur intérêt semblant d'autant plus lointain que l'aspect mathématique pur de ces formules est sans intérêt théorique.

Par contre, maintenant, étant donné les extraordinaires progrès de rapidité et d'économie des calculatrices électroniques, il est possible d'exécuter économiquement des calculs de réfraction très précis utilisant

au besoin des formules théoriques complexes. Il devient donc possible d'utiliser les corrections de longueur d'onde présentées ici ; elles permettent d'augmenter encore la précision et la sécurité des calculs électroniques de propagation d'onde de gravité.

DEFINITION DU PROBLEME ET NOTATIONS

Nous considérons la propagation d'ondes de gravité "monochromatiques" sur un plan d'eau de profondeur variable d'un point à un autre. Nous nous limitons à la théorie irrotationnelle, en fluide parfait et incompressible ; par ailleurs, nous négligeons les termes de l'ordre du carré de la cambrure.

La méthode que nous employons est du type "calcul des perturbations", le phénomène de référence (non perturbé) étant la houle monochromatique cylindrique en profondeur constante.

D'une façon plus précise, les ondes étudiées devront être *localement* peu différentes d'une houle de référence ; par contre, par suite des effets cumulatifs de diverses déformations, une houle de référence donnée n'aura qu'une valeur locale. Ces hypothèses sont d'ailleurs parmi celles que l'on fait implicitement pour justifier la théorie usuelle du tracé des épures de réfraction. On peut ainsi définir des fronts d'onde, des orthogonales, des amplitudes locales, etc...

En chaque point, la houle de référence locale, ou houle "tangente", aura par définition des fronts d'onde et des orthogonales rectilignes, une amplitude constante ainsi qu'une profondeur de référence également constante et égale à la profondeur réelle locale. Notre hypothèse suivant laquelle le mouvement réel diffère localement peu de la houle de référence entraîne donc la petitesse :

- de la courbure des fronts d'ondes,
- de la courbure des orthogonales,
- des pentes de fond,
- des dérivées de l'amplitude.

Ces quantités seront considérées comme des infiniment petits dont certaines puissances ou produits seront négligés suivant des règles que nous préciserons plus loin.

Les notations utilisées sont les suivantes :

x, y, z , coordonnées dans un système cartésien OXYZ dont l'origine est sur la surface libre moyenne, l'axe OZ étant vertical ascendant.

ξ, η, z , coordonnées dans un système curviligne tri-orthogonal, z étant défini comme précédemment, ξ et η étant tels que les lignes $\xi = c^{te}$ correspondent aux fronts d'onde et les lignes $\eta = c^{te}$, aux orthogonales, le sens de la propagation étant celui des ξ croissants et deux lignes de crête consécutives ayant des coordonnées ξ différant de 2π .

$\varphi(\xi, \eta, z, t)$: potentiel des vitesses du mouvement,

k , fréquence angulaire de la houle ($k = \frac{2\pi}{T}$),

T , période de la houle,

$h(\xi, \eta)$, profondeur locale ($z = -h$ sur le fond),

m_0 , nombre d'ondes de référence ($k^2 = gm_0 \tanh m_0 h$),

m , nombre d'ondes corrigé $m \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2}$

m' , défini dans le texte,

l , défini par $l = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}$

γ_1 , courbure des fronts d'onde (positif lorsque les ondes convergent),

γ_2 , courbure des orthogonales (positif lorsque la concavité est vers les η croissants),

α , pente du fond le long des orthogonales, positive lorsque le fond remonte (la profondeur diminue), dans le sens de la propagation :

$$\alpha = -m \frac{\partial h}{\partial \xi}$$

β , pente transversale du fond le long des fronts d'onde, positive lorsque le fond remonte dans le sens des η croissants

$$\beta = -1 \frac{\partial h}{\partial \eta},$$

a , demi-amplitude locale de la houle.

EQUATIONS ET ORDRE D'APPROXIMATION

Nous définirons le mouvement par son potentiel des vitesses $\varphi(\xi, \eta, z, t)$. Nous nous limitons aux théories linéaires par rapport à l'amplitude φ qui devra donc satisfaire aux conditions classiques suivantes :

Incompressibilité :

$$\Delta \varphi = m l \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{m}{1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right\} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Δ désignant le laplacien.

Condition sur le fond :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = m \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + l \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \text{ pour } z = -h$$

Condition de pression constante en surface :

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -k^2 \varphi = 0 \text{ pour } z = 0$$

Nous savons déjà que ces équations ne sont justes qu'à des termes de l'ordre du carré de l'amplitude près. Mais de plus, nous considérons comme petites les quantités γ_1 et γ_2 , ainsi que les dérivées de h et de a .

Plusieurs de ces infiniment petits sont a priori indépendants si bien que la définition de l'ordre d'approximation auquel on pousse les calculs est assez complexe. La façon la plus directe de l'exprimer est de faire la liste des quantités non négligées, cependant, pour rendre cette liste moins arbitraire et abrégé l'énoncé des approximations faites, nous introduisons un infiniment petit de référence ε et convenons que :

α et β sont de l'ordre de ε^3 .

Toutes les autres dérivées de h sont d'ordre supérieur au 5ème :

γ_1 est de l'ordre de ε^2 .

$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y}$ est de l'ordre de ε^2 .

$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}$ est de l'ordre de ε^4 .

Les dérivées supérieures de a , divisées par a , sont d'ordre supérieur au 5ème ; les autres quantités infiniment petites ($\gamma_2, \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial z},$ etc...) ne sont pas indépendantes des précédentes.

Nous convenons alors que toutes les équations du problème telles qu'elles sont écrites ci-dessus doivent être satisfaites à des quantités du sixième ordre (multipliées par a) près.

Au facteur a près qui intervient partout au 1er degré, nous conservons donc toutes les quantités du même ordre que :

$$\gamma_1, \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial \eta}, \alpha, \beta, \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2}$$

ainsi que les produits deux à deux des quatre premières ($\alpha\beta$ excepté) et les carrés des deux premières.

Ainsi que nous l'avons indiqué dans l'introduction, la recherche de la solution ne met pas en jeu de méthodes mathématiques originales ou intéressantes en elles-mêmes. En résumé, elles consistent à partir d'une première approximation qui revient à admettre que localement le potentiel a la même expression que celui de la houle de référence locale :

$$\Phi_0 = f \operatorname{ch} m(z+h) \sin(kt-\xi)$$

expression dans laquelle f , m et h sont des fonctions de ξ et de η et ξ étant une ordonnée curviligne convenable.

Les équations du problème imposent alors :

- de donner une forme précise aux fonctions f et m ,
- de définir différentiellement le système de coordonnées ξ, η ,
- d'introduire un certain nombre de termes correctifs.

Les formules essentielles auxquelles on aboutit ainsi, sont réunies sur le tableau p.7.

Elles appellent les remarques suivantes :

a) - Dans un but de simplification, nous n'avons pas fait apparaître directement l'amplitude dans l'expression de Φ mais une fonction f qui lui est liée en première approximation par la relation (12).

b) - La relation (3) définit les positions relatives des lignes $\xi = c^{te}$, la construction usuelle des épures de réfraction (à partir d'un front d'onde origine) n'est autre que l'intégration graphique de ces équations - de même que le calcul sur ordinateur en est l'intégration numérique.

Notre résultat justifie donc le procédé de construction ou de calcul des épures de réfraction, cependant, il apporte une correction du fait que m est légèrement différent de m_0 . Autrement dit, la longueur d'onde locale dont il faut tenir compte pour ces épures est :

$$L = \frac{2\pi}{m} \text{ et non } L_0 = \frac{2\pi}{m_0}$$

Nous étudierons plus en détail, cette correction qui constitue l'essentiel du résultat obtenu, en ce qui concerne les applications.

c) - De même que m est inversement proportionnel à l'écartement des lignes $\xi = c^{te}$, l est inversement proportionnel à l'écartement des orthogonales. La relation (2) correspond à la loi de

TABLEAU DE FORMULES

$$\varphi = f \left\{ \begin{aligned} & [\text{ch } m'(z+h)] \sin(kt-\xi) + a[Qm(z+h)\text{sh } m(z+h) + G] \cos(kt-\xi) \\ & + \frac{1}{m} \left[\alpha \frac{\gamma_1}{2} \text{sh } m(z+h) - \beta bG + \theta \text{ch } m(z+h) \right] \sin(kt-\xi) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$f = K(\eta) \sqrt{\frac{1}{E}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2} = m \quad (3)$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2} \quad (4)$$

$$m = m_0 - \frac{\alpha \gamma_1}{2E} + \frac{\gamma_1^2}{8m} + \frac{1}{2K(\eta)\sqrt{1}} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[\frac{K(\eta)\sqrt{1}}{m} \right] \quad (5)$$

$$\text{où : } \frac{\partial}{\partial \tau} = 1 \frac{\partial}{\partial \eta} ; \quad \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = 1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(1 \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

$$m' = m_0 - \frac{\alpha \gamma_1}{2E} - \beta bQ \quad (6)$$

$$gm_0 \text{ th } m_0 h = k^2 \quad (7)$$

$$E = \text{ch } m h \cdot \text{sh } m h + m h \quad Q = \frac{\text{sh } m h \text{ ch }^3 m h}{E^2} \quad (8)$$

$$G = \left[\frac{m(z+h)}{2E} - 1 \right] m(z+h) \text{ch } m(z+h) \quad (9)$$

$$b = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (10)$$

$$\gamma_1 = \frac{m}{1} \frac{\partial 1}{\partial \xi} = \frac{1}{R} \quad (R = \text{rayon de courbure des fronts d'onde}) \quad (11)$$

θ = fonction arbitraire de ξ et η d'ordre de grandeur ε^4 ou ε^5 et dont toutes les dérivées sont négligeables.

$K(\eta)$ = fonction arbitraire de η satisfaisant aux conditions d'ordre de grandeur indiquées pour a . On a d'ailleurs en première approximation :

$$a = - \frac{m' \text{sh } m'h}{k} f \quad (12)$$

la valeur absolue de a étant la demi-amplitude.

NB - Sauf dans l'équation (3) m peut partout être remplacé par m' ou m_0 sans que l'ordre d'approximation choisi cesse d'être respecté.

conservation des énergies transmises entre deux orthogonales (en fait, il faudrait dire, des énergies de référence car on admet dans cet énoncé que la formule de transmission d'énergie est celle de la houle de référence locale).

Le débit moyen d'énergie par unité de temps et par unité de largeur de front est en effet pour une houle cylindrique en profondeur constante :

$$\frac{\rho g a^2 k}{4m_0} \frac{E_0}{\text{sh } m_0 h \text{ ch } m_0 h} \quad (E_0 = \text{sh } m_0 h \text{ ch } m_0 h + m_0 h)$$

ce qui, compte tenu des formules (2) et (12) et (7) où en première approximation, nous confondrons m , m' et m_0 , peut s'écrire :

$$\frac{\rho k}{4} K^2(\eta)$$

Le débit d'énergie par unité de temps entre deux orthogonales η et $\eta+d\eta$ est, toujours en première approximation :

$$\frac{\rho k}{4} K^2(\eta) d\eta$$

La fonction "arbitraire" $K(\eta)$ représente donc à un facteur constant près et en première approximation la racine carrée (positive ou négative) de la densité d'énergie par rapport à la variable η . Cette densité ne dépend pas de ξ , elle se conserve donc le long des orthogonales, ce qui est bien le principe appliqué pour le calcul classique des amplitudes réfractées.

d) - Ce qui précède n'est vrai qu'en première approximation car, en fait, m , m_0 et m' ne sont pas rigoureusement égaux et d'autre part, le troisième crochet de la formule (1) apporte une certaine modification à l'amplitude qui n'est donc pas rigoureusement donnée par l'expression (12).

L'existence de la fonction arbitraire θ dans ce crochet montre que la théorie, au degré d'approximation où elle est poussée, ne peut déterminer les lois de variation des amplitudes mieux qu'au quatrième ordre près - par conséquent, les "premières approximations"

établies plus haut, sont les seules que cette théorie nous permette d'atteindre. Elles sont en plein accord avec la règle de non-transfert de l'énergie à travers les orthogonales.

APPLICATION AUX CALCULS DE REFRACTION

La formule (5) permet d'apporter une correction aux calculs ou de réfraction. Celles-ci doivent être établies comme si la longueur d'onde locale, ou la vitesse de phase, était proportionnelle à $\frac{1}{m}$ et non à $\frac{1}{m_0}$.

Posons, pour simplifier :

$$\Delta m = m - m_0 = -\frac{\alpha \gamma_1}{2E} + \frac{\gamma_1^2}{8m_0} + \frac{1}{2K(\eta)\sqrt{1}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{K(\eta)\sqrt{1}}{m_0} \right]$$

où nous avons, à droite, remplacé les m par des m_0 comme il est licite de le faire.

La longueur d'onde à prendre en compte dans les épures de réfraction est :

$$L = \frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{m_0} \left(1 - \frac{\Delta m}{m_0} \right)$$

Autrement dit, la correction relative sur les longueurs d'onde sera : $-\frac{\Delta m}{m_0}$. Si cette correction était partout la même, la forme du plan de vagues ne serait pas changée et la correction resterait purement locale et sans intérêt pratique vu sa petitesse. Mais, en fait, cette correction relative varie d'un point à un autre et peut provoquer ainsi des déviations des orthogonales qui se répercutent sur l'ensemble du plan de vagues.

ORDRE DE GRANDEUR DES CORRECTIONS

Il est évidemment utile de se rendre compte de l'ordre de grandeur pratique des corrections $\frac{\Delta m}{m_0}$ ainsi introduites. Pour cela, nous examinerons quelques cas numériques.

$$a) - \text{Terme} : - \frac{\alpha \gamma_1}{2Em_0}$$

Un rayon de courbure des crêtes égal à la longueur d'onde est déjà relativement petit ; nous pouvons donc considérer que $\frac{1}{L}$ est une valeur forte pour γ_1 ; il en résulterait :

$$\frac{\gamma_1}{m_0} = \frac{1}{2\pi}$$

E croît très vite avec la profondeur mais par fonds faibles il vaut environ $2m_0h$. Pour des profondeurs relatives faibles $\frac{L}{h} = 20$, par exemple, on aurait :

$$E \neq 2mh = \frac{4\pi}{20}$$

Enfin α est rarement de plus de quelques pour-cent. Pour un fond naturel très raide, 10 % par exemple serait déjà très élevé. En définitive, on aurait donc :

$$- 0,1 \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{20}{4\pi} \neq - 0,025$$

Des conditions extrêmement favorables étant réunies, on voit que la correction reste néanmoins assez minime (2,5 %).

On peut ajouter que les profondeurs relatives très faibles ne se rencontreront vraisemblablement que vers la fin de la course des houles, sur les plages où elles déferleront. Les modifications du plan de vagues n'ont plus alors pratiquement qu'un effet local puisque les changements d'orientation des orthogonales n'auront plus d'effets lointains.

En résumé, ce terme est vraisemblablement toujours négligeable.

$$b) - \text{Terme} : \frac{\gamma_1^2}{8m_0^2}$$

Dans l'hypothèse de courbure ci-dessus ($\gamma_1 = \frac{1}{L}$), ce terme vaut :

$$\frac{1}{8(2\pi)^2} = 0,003$$

Il est donc également très faible et sauf dans des travaux de grande précision, pourra aussi être le plus souvent négligé.

$$c) - \text{Terme} : \frac{1}{2m_0 K(\eta)\sqrt{1}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{K(\eta)\sqrt{1}}{m_0} \right]$$

Si, pour simplifier l'étude de ce terme, nous supposons m_0 (donc h) constant (ou au moins indépendant de η), nous savons que le crochet est proportionnel à un facteur constant (ou indépendant de η) près, à la demi-amplitude a [Cf. formules (2) et (12)]. Ce terme peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{2m_0^2 a} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$$

$m_0^2 a$ représente la courbure maximum de la surface libre de la houle de référence, le terme correctif peut donc s'écrire :

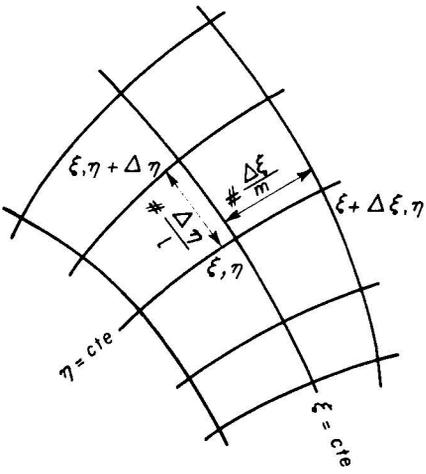
$$- \frac{1}{2} \frac{\gamma_t}{\gamma_n}$$

γ_n et γ_t désignant les courbures de la surface libre des crêtes dans les directions de propagation et de front d'onde.

Ce rapport peut ne pas être négligeable car la réfraction peut provoquer le long d'un front d'onde des variations d'amplitude relativement brutales. γ_t pourra aussi prendre des valeurs relativement importantes au voisinage de points de diffraction ainsi que le montre l'exemple suivant.

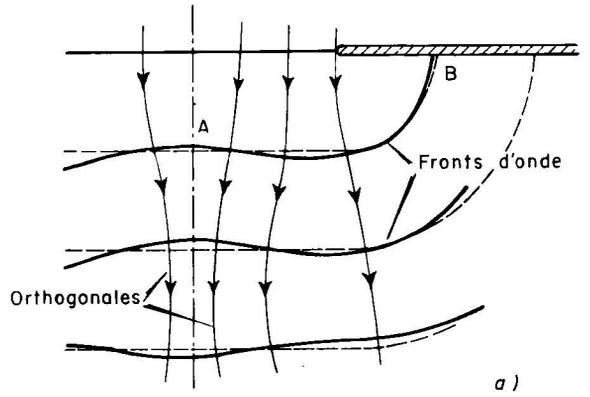
Il s'agit en fait de l'étude expérimentale de la diffraction d'une houle en profondeur constante au passage d'une brèche de trois longueurs d'onde de large, pratiquée dans une jetée rectiligne indéfinie perpendiculaire à la direction de propagation incidente.

La figure 2a) représente schématiquement la disposition de l'essai. Par suite des phénomènes de diffraction, l'amplitude n'est pas

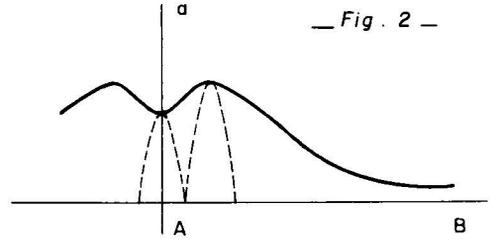


— Fig. 1 —

Signification géométrique de l et n dans le système de coordonnées ξ, η

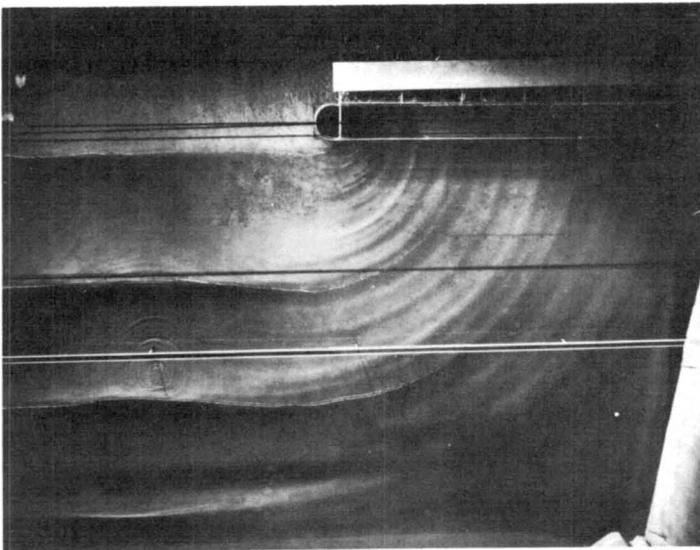


a)



— Fig. 2 —

b)



— Fig. 3 —

répartie uniformément le long des crêtes. Au contraire, au voisinage de la brèche, l'amplitude marque une diminution sensible au voisinage de l'axe et bien entendu des diminutions importantes vers les zones abritées. La répartition de l'amplitude mesurée le long de la crête AB (ayant parcouru une longueur d'onde depuis la brèche) est donnée à titre d'exemple dans la figure 2b).

Sur cette figure, sont également indiquées en pointillés, aux mêmes échelles verticales exagérées, les allures des sections de la houle par des plans verticaux perpendiculaires à la crête. On voit que les courbures γ_t quoique plus faibles que les courbures γ_n ne sont cependant pas d'un ordre de grandeur très différent si bien que l'on peut s'attendre à des corrections $\frac{\Delta m}{m_0}$ atteignant par exemple l'ordre de grandeur de 10 %.

Ainsi, les longueurs d'onde seront sensiblement plus faibles sur l'axe que de part et d'autre de celui-ci et les orthogonales convergeront vers l'axe ainsi que le montre la figure. Cette convergence aura pour effet de reconcentrer de l'énergie vers la zone axiale et ainsi, d'y augmenter l'amplitude aux dépens des zones voisines. Ainsi, une longueur d'onde plus loin, par exemple, l'amplitude aura au contraire un maximum local sur l'axe au lieu d'un minimum. L'inversion des courbures γ_t qui en résultera fera d'ailleurs également s'inverser la courbure des orthogonales.

Ainsi, l'introduction de la correction de longueur d'onde dans les calculs de diffraction permet, pour cet exemple, de prévoir des modifications de répartition d'énergie le long de la crête alors que la théorie usuelle n'aurait pu le faire. Ces modifications se font d'ailleurs sans enfreindre la loi de non-transfert d'énergie à travers les orthogonales mais celles-ci, au lieu d'être rectilignes comme la théorie usuelle le prévoit en profondeur constante, deviennent en fait des lignes plus ou moins sinueuses.

La photographie de l'essai, figure 3, permet de voir clairement l'essentiel des phénomènes décrits, y compris le renforcement d'amplitude dans l'axe à quelque distance de la brèche et l'inversion de la variation de la longueur d'onde le long du front.

LIMITES DE VALIDITE, COMPLEMENTS

Il importe de rappeler que toute cette théorie est basée sur la petitesse des éléments qui distinguent localement la houle réfractée de la houle de référence, soit α , β , γ_1 , etc..., son domaine de validité sera donc celui où ces quantités seront faibles, c'est-à-dire au fond les cas que l'on pourrait appeler de réfraction modérée. Il faut exclure en particulier, les voisinages des croisements et accumulations d'orthogonales (focales, caustiques, etc...) qui, d'ailleurs, cesseraient de satisfaire à nos conditions qui excluent en fait toute anomalie de la transformation $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$.

D'une façon générale, tous les accidents "brusques" (voire discontinuités) de la propagation entrent dans le domaine de la diffraction et il est certain que l'ensemble du phénomène de diffraction à travers une brèche par exemple, ne saurait être *entièrement* étudié par une théorie de la réfraction telle que celle-ci. Il suffit de remarquer par exemple, qu'au voisinage des extrémités de la brèche, notre infiniment petit γ_1 , par exemple, deviendrait infiniment grand.

En résumé, les corrections proposées ne nous permettent pas de traiter tous les cas de propagation et en particulier, pas ceux qui relèvent foncièrement de la théorie de la diffraction, mais elles permettent néanmoins d'étendre le domaine de validité des calculs de réfraction et d'augmenter la précision de certains résultats.

Il est peut-être utile de rappeler également que nous nous sommes limités à des théories du premier ordre par rapport aux amplitudes a de la houle. Nous avons donc la possibilité, au même degré de précision de "superposer" un nombre quelconque de houles de fréquences identiques ou différentes. Par contre, nous n'utilisons qu'une théorie approchée. En particulier, pour les applications aux calculs de réfraction, il pourrait être souhaitable d'ajouter aux corrections données ici celles qui résultent de l'importance de la courbure - Cf. référence [2]. La discussion complète de cette nouvelle "correction" nous entraînerait trop loin pour le cadre de la présente étude.

REFERENCES

-

- [1] STUDY OF WAVE PROPAGATION IN WATER OF GRADUALLY VARYING DEPTH --
F.BIESEL -- GRAVITY WAVES -- NAT.BUREAU OF STANDARDS --
CIRCULAR 521, pp.248-253.
- [2] REMARQUES SUR LA CELERITE DE LA HOULE IRROTATIONNELLE EXACTE AU
TROISIEME ORDRE -- F.BIESEL -- LA HOUILLE BLANCHE N° 3 --
MAI-JUIN 1951, pp.414-416.