Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

197 | 2012
Catégories, classification, complexité, consensus… Autour des travaux de Jean-Pierre Barthélemy

Jean-Pierre Barthélemy et le principe de Pareto

Jean-Pierre Barthélemy and Pareto's principle

Bernard Monjardet

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition électronique
URL : http://msh.revues.org/12151
DOI : 10.4000/msh.12151
ISSN : 1950-6821

Édition imprimée
Date de publication : 22 avril 2012
Pagination : 9-17
ISSN : 0987-6936

Référence électronique
Bernard Monjardet, « Jean-Pierre Barthélemy et le principe de Pareto », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 197 | Printemps 2012, mis en ligne le 02 mai 2012, consulté le 07 octobre 2016. URL : http://msh.revues.org/12151 ; DOI : 10.4000/msh.12151

Math. Sci. hum / Mathematics and Social Sciences (50e année, n° 197, *2012*(1), p. 9-17)

JEAN-PIERRE BARTHÉLEMY ET LE PRINCIPE DE PARETO

Bernard MONJARDET[1]

RÉSUMÉ – *Ayant commencé ses activités de recherche par des travaux de mathématique « pure » en théorie des catégories, Jean-Pierre Barthélemy s'engage ensuite dans des directions bien différentes, relevant des mathématiques discrètes et de l'informatique et de leurs contributions à certaines problématiques des sciences humaines. Son premier travail dans ces nouvelles voies porte sur les procédures métriques d'agrégation et le principe de Pareto en théorie du consensus. Je présente ce travail et signale des prolongements effectués par lui ou par d'autres auteurs.*

MOTS CLÉS – Consensus, Distance de la différence symétrique, Éloignement, Majorité, Médiane, Principe de Pareto, Procédure métrique d'agrégation, Treillis

ABSTRACT – Jean-Pierre Barthélemy and Pareto's principle
After his first works in "pure" category theory, Jean-Pierre Barthélemy turns to completely different research directions, namely to discrete mathematics, computer sciences and their contributions to some problems of human or social sciences. His first work in these new areas deals with metric aggregation rules and the Pareto principle in consensus theory. I present this work and I mention developments done by Jean-Pierre Barthélemy himself and by other authors.

KEYWORDS – Consensus, Lattice, Majority, Median, Metric aggregation rule, Pareto's principle, Remoteness, Symmetric difference distance

1. INTRODUCTION

La première publication mathématique de Jean-Pierre Barthélemy est en 1971 son doctorat de troisième cycle obtenu à l'Université Paris 7. En 1979, il obtient son doctorat d'état ès sciences à l'Université de Franche-Comté (où il avait été nommé assistant en 1970). Au cours de ces huit années, Jean-Pierre change complètement de domaine de recherche. Sa thèse de troisième cycle *Esquisses pointées* portant sur la théorie des catégories et dirigée par Charles Ehresmann est suivie de plusieurs articles et *Comptes Rendus de l'Académie des sciences* sur cette même théorie, le dernier datant de 1974. En 1976 paraît dans la revue *Mathématiques et Sciences humaines* son article « Sur les éloignements symétriques et le principe de Pareto »[2]. Il inaugure une

[1] Centre d'Études de la Sorbonne (CES), Université ParisI-Panthéon-Sorbonne, Maison des Sciences Économiques (MSE), 106-112 bd de l'Hôpital 75647 Paris Cedex 13, et Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales (CAMS), École des Hautes Études en Sciences Sociales (EHESS), 190 avenue de France 75244 Paris cedex 13, bernard.monjardet@univ-paris1.fr

[2] On peut se procurer cet article sur le site de la revue :
http:// http://www.ehess.fr/revue-msh/recherche_gb.php?numero=56

importante production scientifique (plus de 80 textes) sur de nombreux thèmes relevant des mathématiques discrètes et de l'informatique et de leurs contributions à certaines problématiques des sciences humaines et sociales. Je donne une analyse de cet article dans la section 2, suivie en conclusion de l'indication de quelques prolongements dus à lui ou à d'autres auteurs.

On peut toutefois se demander à quoi tient ce changement d'orientation de Jean-Pierre[3]. Une des raisons est que s'il a beaucoup apprécié Charles Ehresmann son directeur de thèse, il ne se sent pas très à l'aise dans la petite équipe constituée autour d'Ehresmann et de sa femme sur la théorie et les applications des catégories. Il commence aussi à en avoir assez des mathématiques pures et Berger[4] lui conseille de changer de sujet[5]. Or il a rencontré à Besançon celui qu'il appellera plus tard son « bon maître », à savoir Jean-Philippe Massonie, enseignant de statistiques à la Faculté des Lettres et Sciences Humaines et très actif dans la promotion des bons usages de méthodes mathématiques, informatiques et statistiques en sciences humaines (notamment en géographie et linguistique).[6] Quelques jeunes mathématiciens, dont Jean-Pierre « était le grand frère », à la recherche de directions de travaux s'engagent dans des séminaires et activités de recherches sur ces thèmes ou/et en mathématiques discrètes. Par exemple, début 1976, Massonnie crée le *séminaire universitaire de recherche floue* – « SURF » – avec Jean-Pierre, D. Boichut et Xuan Luong.

Pour en revenir au texte de Jean-Pierre, celui-ci, à l'automne 1976, en avait envoyé un premier (« La distance de la différence symétrique et les relations d'équivalence ») à la revue *Mathématiques et Sciences humaines*. Il y démontrait la propriété parétienne pour cette distance et ces relations (voir les définitions dans la section suivante). Je lui avais alors signalé – ce fut notre premier contact – que ce résultat avait déjà été obtenu par Simon Régnier [1965], mais que son approche posait des questions intéressantes, telle qu'une possible extension aux préordres totaux. Il s'ensuivit un nouveau texte, une correspondance nourrie sur icelui, ma première rencontre avec Jean-Pierre venu à Paris en décembre et une copieuse version finale transmise par lui le 20 janvier 1977 (dernier jour pour qu'elle puisse être publiée dans le le numéro 56 de la revue) et contenant notamment la preuve de la propriété parétienne pour les préordres totaux. Dès lors, Jean-Pierre va continuer dans cette orientation pour obtenir deux ans plus tard sa thèse d'état (*Propriétés métriques des ensembles ordonnés. Comparaison et agrégation des relations binaires*) puis développer de nombreuses recherches variées (voir sa liste de publications au début de ce numéro).

2. LES ÉLOIGNEMENTS SYMÉTRIQUES ET LE PRINCIPE DE PARETO

Le texte de Jean-Pierre se situe dans le cadre de l'approche métrique en théorie du consensus. Cette théorie porte sur les procédures permettant d'agréger plusieurs

---

[3] Cette partie a bénéficié de notes recueillies par Christiane Barthélemy sur des propos autobiographiques de Jean-Pierre et d'autres témoignages dont celui de Xuan Luong.

[4] Marcel Berger, mathématicien français, spécialiste de géométrie différentielle, que Jean-Pierre avait eu comme enseignant en troisième cycle.

[5] D'autre part, il n'était pas évident qu'une thèse (d'état) dans ce domaine puisse permettre d'obtenir aisément un poste de « maître de conférences », à l'époque premier pas avant de devenir professeur titulaire (ces maîtres de conférences sont intégrés dans le nouveau corps de professeurs en 1979).

[6] En 1964, il a créé le laboratoire de Mathématique-Informatique-Statistique (MIS) au sein de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de l'Université de Franche-Comté. Pour plus de détails cf. http://www.intelligence-territoriale.eu/index.php/fre/Quoi-de-neuf/Editoriaux/Hommage-à-Jean-Philippe-MASSONIE.

« éléments » de même nature en un – ou parfois plusieurs – éléments de même nature. Les éléments en question peuvent être par exemple des ordres ou préordres totaux exprimant les préférences de plusieurs votants sur des candidats, ou des partitions d'un même ensemble d'objets suivant différents critères. La théorie étudie les procédures existantes (leurs qualités et leurs défauts) et cherche à définir de « bonnes » procédures. Une des approches à cette fin est celle dite « métrique ». Je la précise ci-dessous dans le cas – qui est celui du texte de Jean-Pierre – où il s'agit d'agréger des relations binaires. Il sera commode de parler de votants exprimant leurs préférences sur des candidats, bien que cette situation ne constitue qu'un des exemples possibles.

On a donc un ensemble $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ de *votants*, un ensemble $X = \{x, y, \ldots, m\}$ de *candidats*. Chaque votant exprime une *préférence* R sur les candidats, où R est une relation sur X prise dans *l'ensemble* $\mathcal{D}$ des (relations de) préférences individuelles possibles. Par exemple, $\mathcal{D}$ peut être l'ensemble des ordres totaux définis sur X ou celui des préordres totaux. Le n-uple $\pi = (R_1, ..., R_n)$ est le *profil* des préférences des votants. L'ensemble des profils de préférence possibles est donc $\mathcal{D}^n$. Pour obtenir une relation consensus C agrégeant (au mieux) les préférences individuelles, on définit une notion d'***éloignement*** mesurant l'écart entre une relation de préférence collective acceptable et les préférences individuelles. En général, on considère que les préférences collectives acceptables sont celles qui peuvent être exprimées par les votants, c'est-à-dire les relations appartenant à $\mathcal{D}$. D'autre part, l'éloignement est généralement obtenu à partir d'une distance d définie sur $\mathcal{D}$. Par exemple, d étant une telle distance, on peut prendre comme éloignement d'une relation R de $\mathcal{D}$ à un profil $\pi = (R_1, ..., R_n) \in \mathcal{D}^n$ les trois expressions suivantes :

$$(\text{E1}) : E(R, \pi) = \sum_{i=1}^{n} d(R_i, R)$$

$$(\text{E2}) : E(R, \pi) = \operatorname*{Max}_{1 \le i \le n} d(R_i, R)$$

$$(\text{E3}) : E(R, \pi) = \sum_{i=1}^{n} d^2(R_i, R)\,.$$

Ayant choisi un éloignement E, on dit alors qu'une relation $C \in \mathcal{D}$ est *centrale par rapport à l'éloignement* E, ou ***E-centrale***, pour un profil $\pi \in \mathcal{D}^n$ si

$$\boldsymbol{E(C, \pi) = \mathrm{Min}_{R \in \mathcal{D}} E(R, \pi)}$$

donc si elle minimise l'éloignement au profil.

On a ainsi défini une procédure d'agrégation qui à tout profil π de $\mathcal{D}$ associe une ou plusieurs (car rien n'empêche que le problème d'optimisation ci-dessus ait plusieurs solutions) relations centrales. Si l'éloignement a été défini à partir d'une distance, on dit qu'on a défini une **(*multi*) *procédure d'agrégation métrique*.**[7]

Lorsque l'on considère les propriétés vérifiées ou non par une procédure d'agrégation, il y en a au moins une que l'on souhaite voir toujours vérifiée, à savoir le respect de l'unanimité : si les votants sont unanimes à considérer que le candidat x est préférable au candidat y, il faut que x soit préféré à y dans la préférence collective obtenue par la procédure d'agrégation. En théorie du choix social, cette propriété est

[7] Plusieurs auteurs, notamment Fréchet [1949] et Kemeny [1959] ont – indépendamment – défini une telle procédure. On peut aussi la faire remonter aux propositions de Condorcet pour pallier l'« effet Condorcet » (cf. à ce sujet [Monjardet, 1990]).

souvent appelée ***principe de Pareto***[8] pour la raison suivante. On remarque d'abord que la préférence collective (comme toute relation de préférence) peut être utilisée pour choisir entre les candidats : le candidat choisi sera l'un de ceux qui est « optimal » pour cette préférence, i.e. tel qu'il n'existe pas de candidat qui lui soit préféré. Considérons, par exemple, le cas où les préférences individuelles et la préférence collective sont des ordres totaux. Les préférences unanimes des votants d'un profil $\pi = (L_1, ..., L_n)$ d'ordres totaux sont obtenues en prenant l'intersection des n ordres L_i et constituent donc un ordre partiel sur X. Dire que la préférence collective, ici un ordre total, respecte l'unanimité revient à dire qu'elle contient cet ordre partiel. Il s'ensuit que le plus grand élément de cet ordre total est nécessairement un élément maximal de cet ordre partiel. Le principe de Pareto impose donc que le candidat préféré dans l'ordre total constituant la préférence collective appartienne à l'ensemble des éléments maximaux de l'ordre partiel d'unanimité. Dans le contexte de l'économie du bien-être où existe un ordre partiel (obtenu par intersection des ordres individuels) sur des états économiques, c'est cette condition de maximalité de l'état préférable qu'avait introduite Pareto (dans son *Manuel d'économie politique* de 1909).

Revenant aux procédures d'agrégation, définies comme des applications F associant à tout profil π de préférences individuelles une ou plusieurs préférences collectives, il est alors naturel de se poser la question suivante : une procédure d'agrégation métrique vérifie-t-elle le principe de Pareto, ou comme l'on dit parfois est-elle parétienne ? Ou encore :

si $C \in F(\pi)$ est une relation centrale de $\pi = (R_1, ..., R_n)$, a-t-on $\cap_{i \in N} R_i \subseteq C$?[9]

Avant le texte de Jean-Pierre, la question avait été posée et avait reçu une réponse positive pour la procédure métrique particulière, dite procédure médiane et pour deux classes de relations, à savoir les équivalences et les ordres totaux. La ***procédure médiane***[10] est la procédure d'agrégation métrique obtenue en prenant comme distance entre relations la *distance de la différence symétrique* :

$$\delta(R, R') = |R \Delta R'| = |R \cup R'| - |R \cap R'| = |R \setminus R'| + |R' \setminus R|,$$

et comme éloignement la formulation (E1) de la somme des distances :

$$E(R, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \delta(R_i, R).$$

Les relations centrales ainsi obtenues sont (généralement) appelées les ***relations médianes*** du profil.

En 1965, Simon Régnier avait montré que la procédure médiane était parétienne pour les relations « d'équivalence »[11]. En 1973, je montrais le même résultat pour les

---

[8] Le terme *principe de Pareto* désigne aussi parfois tout autre chose, à savoir la loi de Pareto, loi de probabilité définie par Pareto à partir de ses observations sur la distribution de certaines variables statistiques, telles que le revenu.

[9] Lorsque les relations concernées ne sont pas antisymétriques, cette formulation admet plusieurs variantes portant sur les parties antisymétriques ou symétriques de ces relations et de la relation consensus. On trouvera plus loin une de ces variantes appelée *propriété quasi-parétienne* dans le texte de Barthélemy.

[10] Pour des présentations de cette procédure médiane et plus généralement des procédures métriques d'agrégation, voir notamment Barthélemy et Monjardet [1981] et Hudry *et al*. [2006, 2009].

[11] En fait, Régnier considérait des profils de partitions et appelait centrales celles minimisant la somme des distances de la différence symétrique aux partitions du profil (ce qui correspond à des équivalences médianes).

ordres (totaux) médians, et Jacqueline Feldman le généralisait aux ordres (totaux) centraux relativement aux deux autres éloignements (E2) et (E3) définis plus haut (et toujours pour la distance de la différence symétrique). Sa démonstration reposait sur la « monotonie » des éloignements et une propriété de cette distance.

L'apport de Jean-Pierre va être de généraliser les concepts et les observations précédentes et d'étendre ainsi les résultats obtenus. Il commence par donner une définition abstraite de la notion d'éloignement. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des relations considérées, $G(\mathcal{D})$ l'ensemble des profils de « taille variable » ($G(\mathcal{D}) = \cup_{n>0} \mathcal{D}^n$). Un ***éloignement*** E sur $\mathcal{D}$ est une application E de $\mathcal{D}\times G(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels) vérifiant les propriétés suivantes :

(P_1) La restriction de E à $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ est une distance d sur $\mathcal{D}$.

(P_2) Pour tout $(R, \pi) \in \mathcal{D}\times G(\mathcal{D})$, $E(R, \pi) \geq 0$.

(P_3) $E(R, \pi) = 0$ si et seulement si $\pi = (R, ..., R)$ (profil « unanime »).

(P_4) Pour tout $R \in \mathcal{D}$ et tous $\pi, \pi' \in G(\mathcal{D})$, $E(R, \pi\pi') \leq E(R, \pi) + E(R, \pi')$ (où $\pi\pi'$ est le profil obtenu par concaténation des deux profils π et π').

Un éloignement E est dit ***monotone*** s'il vérifie :

(M) Pour tout profil $\pi = (R_1, ..., R_n) \in G(\mathcal{D})$ et pour tout couple $(R,R') \in \mathcal{D}\times\mathcal{D}$, les inégalités $d(R, R_i) \leq d(R', R_i)$ pour tout i, l'une au moins de ces inégalités étant stricte, impliquent $E(R, \pi) < E(R', \pi)$.

Par exemple, les trois éloignements (E1), (E2) et (E3) définis plus haut sont monotones.

Étant donné un éloignement E, on considère les relations C dites ***E-centrales*** pour un profil $\pi \in G(\mathcal{D})$, c'est-à-dire telles que $E(C, \pi) = \text{Min}_{R\in\mathcal{D}}\, E(R, \pi)$.

- Un éloignement E est dit ***parétien*** sur $\mathcal{D}$ s'il vérifie :

  (P) Pour tout profil $\pi = (R_1, ..., R_n) \in G(\mathcal{D})$ et toute relation C qui est E-centrale pour π,

$$\cap_{i\in N} R_i \subseteq C.$$

- Un éloignement E est dit ***quasi-parétien*** sur $\mathcal{D}$ s'il vérifie :

  (QP) Pour tout profil $\pi = (R_1, ..., R_n) \in G(\mathcal{D})$ et toute relation C qui est E-centrale pour π,

$$\cap_{i\in N} R_i \setminus \cap_{i\in N} (R_i \cap R_i^r) \subseteq C.$$

Dans la formule ci-dessus, R_i^r est la relation réciproque de R ($(y, x) \in R_i^r$ si et seulement si $(x, y) \in R_i$) et – en termes de préférence – $(R_i \cap R_i^r)$ est la relation d'*indifférence* du votant i. Une relation E-centrale pour π doit donc contenir tous les couples d'unanimité à l'exception des couples d'indifférence unanimes.

Le problème est alors de déterminer des conditions rendant un éloignement parétien ou quasi-parétien. Celle qu'introduit Jean-Pierre est une condition de régularité de $\mathcal{D}$ par rapport à la distance d induite sur $\mathcal{D}$ par l'éloignement (propriété (P_1) ci-dessus) ; elle signifie que si une relation de $\mathcal{D}$ ne contient pas un couple, on peut trouver dans $\mathcal{D}$ une autre relation contenant ce couple et plus proche ou aussi proche de toutes les relations de $\mathcal{D}$ le contenant. Formellement :

Un ensemble de relations $\mathcal{D}$ est ***d-régulier***, si pour tout $C \in \mathcal{D}$ et tout $(x, y) \notin C$, il existe $C' \in \mathcal{D}$ avec $(x, y) \in C'$, telle que :

- pour tout $R \in \mathcal{D}$ avec $(x, y) \in R$ et $(y, x) \notin R$, $d(C', R) < d(C, R)$, et

- pour tout $R \in \mathcal{D}$ avec (x, y) et $(y, x) \in R$, $d(C', R) \leq d(C, R)$.

Le premier résultat (simple mais significatif) est alors le théorème suivant :

Soit E un éloignement monotone sur $\mathcal{D}$ et d la distance induite sur $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D}$ est d-régulier, E est quasi–parétien sur $\mathcal{D}$.

Il a par exemple comme conséquence le résultat de Feldman [1973] – énoncé plus haut – sur les ordres totaux.

Obtenir la propriété quasi-parétienne pour un certain ensemble $\mathcal{D}$ de relations et un éloignement monotone E, revient donc à s'assurer que $\mathcal{D}$ est d-régulier pour la distance d induite par E.

Dans la troisième partie de son article, Jean-Pierre examine si cette propriété de régularité est vérifiée pour un certain nombre d'ensembles de relations lorsque la distance induite par l'éloignement E est – à un coefficient multiplicatif près – la distance de la différence symétrique δ.

Il obtient que cette propriété de δ-régularité est vérifiée pour les ensembles de relations constitués par

1) les relations totales,

2) les relations totales et antisymétriques (dites relations de *tournois*),

3) les ordres totaux,

4) les préordres totaux, ce dernier résultat étant le plus difficile.

Il s'ensuit – en notant $\mathcal{D}$ l'un quelconque de ces quatre ensembles de relations – que tout éloignement E monotone sur $\mathcal{D}$ et dont la restriction à $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ est la distance de la différence symétrique δ est quasi-parétien. Si de plus cet éloignement est l'éloignement (E1), alors il est parétien sur l'ensemble des préordres totaux.

Après cet article de 1976, Jean-Pierre en consacrera un autre [1977] à la propriété parétienne pour des partitions centrales, mais sur un ensemble non nécessairement fini. Dans sa thèse [1979], il reprendra les résultats précédents avec quelques variantes et adjonctions. Dans icelle et dans son article de 1979, il obtiendra de nombreux résultats sur une question connexe initiée par Kemeny [1959] : donner une caractérisation axiomatique de la distance de la différence symétrique entre relations binaires. Enfin, dans l'article de 1976 et dans sa thèse, il s'intéressera aussi à une autre propriété susceptible d'être ou non vérifiée par les relations centrales. Sont-elles stables par restriction ? Soit π un profil de relations définies sur un ensemble X et les relations E-centrales pour ce profil. Si l'on restreint les relations de π à un sous-ensemble Y de X (par exemple, dans un contexte de vote si certains candidats se retirent) les relations E-centrales pour le profil réduit sont-elles – comme on pourrait le souhaiter – les restrictions à Y des relations E-centrales du profil π ?[12] Alors que cette propriété de stabilité est vraie (et caractéristique) sur n'importe quel sous-ensemble Y pour les tournois médians, elle ne l'est plus que pour les intervalles d'un ordre total médian (cf [Jacquet-Lagrèze, 1978]). Jean-Pierre montre qu'elle est vraie (et caractéristique) pour tout Y réunion de classes d'une relation d'équivalence médiane. On trouvera

[12] Cette propriété n'est pas du tout vérifiée pour des procédures de vote comme celle de Borda (où les candidats étant linéairement rangés par les votants, la préférence collective s'obtient à partir de la somme des rangs obtenus par chaque candidat). Ainsi Fishburn [1981] a exhibé des profils d'ordres totaux, pour lesquels lorsque l'un des candidats disparaît de l'ensemble des candidats, l'ordre collectif obtenu pour ce profil restreint est exactement l'inverse de la restriction de l'ordre collectif initial.

énoncés tous ces résultats – ainsi que d'autres – dans son article de synthèse de 1981 sur les procédures métriques d'agrégation.

5. CONCLUSION

Dans ce premier travail inaugurant ses nouvelles directions de recherche, Jean-Pierre témoigne de ses qualités de mathématicien, à la fois apte à abstraire une situation pour obtenir des résultats plus généraux et à trouver des preuves demandant une grande ingéniosité.

En 1981 Jean-Pierre écrira un article de synthèse sur les procédures métriques d'agrégation et notamment sur la propriété parétienne. Il ne reviendra ensuite sur cette question que dans un travail avec Bruno Leclerc [1995] concernant des procédures métriques pour l'agrégation de partitions, les métriques considérées étant des distances classiques dans le treillis des partitions. C'est l'occasion de mentionner que cette question de déterminer si une procédure métrique est ou non parétienne a connu par ailleurs d'importants développements, essentiellement dus à Bruno Leclerc [1990, 1993, 1994, 2003]. Celui-ci considère des procédures d'agrégation métriques portant sur des éléments d'un demi-treillis[13] (qui peut être un treillis) et qui utilisent l'une des nombreuses distances pouvant y être définies. En particulier, ces demi-treillis peuvent être des demi-treillis de relations, comme celui des ordres ou le treillis des équivalences (partitions). Les résultats qui dépendent de ces distances et des propriétés du demi-treillis considéré sont résumés dans le tableau suivant, où δ est la métrique de la différence symétrique (entre les deux ensembles de sup-irréductibles[14] inférieurs ou égaux à deux éléments du demi-treillis) et où ∂ est la distance géodésique dans le graphe non orienté de couverture[15] du demi-treillis.

On constate dans ce tableau que la propriété parétienne est loin d'être toujours vérifiée par une procédure métrique. En particulier, elle ne l'est pas pour l'agrégation de relations d'ordres lorsqu'on utilise une « distance pondérée » différente de la distance de la différence symétrique δ. D'autre part, il reste deux cases à remplir. À vos crayons !

---

[13] Un *inf-demi-treillis* (respectivement, un *sup-demi-treillis*) est un ensemble ordonné $(E, \leq)$ tel que deux éléments quelconques x et y de E admettent toujours un *infimum*, *i.e.* un plus grand minorant (respectivement, un *supremum*, *i.e.* un plus petit commun majorant). Un *treillis* est un ensemble ordonné qui est à la fois un inf-demi-treillis et un sup-demi-treillis. Par exemple, l'ensemble des relations d'ordres définies sur un ensemble est un inf-demi-treillis (l'infimum de deux ordres étant leur intersection), tandis que l'ensemble des relations d'équivalences définies sur un ensemble est un treillis (l'infimum de deux équivalences étant leur intersection et leur supremum la fermeture transitive de leur union). Pour les notions sur les ordres et les treillis, on peut consulter Caspard, Leclerc et Monjardet [2007, 2012].

[14] Un élément d'un ensemble ordonné est *sup-irréductible* si tout ensemble d'éléments dont il est supremum le contient.

[15] Le *graphe non orienté de couverture* d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ (en particulier, d'un demi-treillis) s'obtient en joignant par une arête deux éléments x et y de E dont l'un *couvre* l'autre (*i.e.* tel qu'il n'existe pas d'élément z avec $x < z < y$ ou $y < z < x$). La *distance géodésique* entre deux sommets de ce graphe – comme dans tout graphe non orienté – est la longueur d'une plus courte chaîne entre ces deux sommets.

Satisfaction ou non de la propriété parétienne selon les types de demi-treillis et de distances considérées			
Type de (demi-)treillis	Distance pondérée	Distance δ	Distance ∂
Treillis distributif	OUI[1]	OUI[←]	OUI[←]
Treillis modulaire	?	?	OUI[2]
Treillis inférieurement localement distributif	NON[→]	NON[→]	NON[3]
Treillis inférieurement semimodulaire	NON[↑]	NON[↑]	NON[↑]
Treillis supérieurement semimodulaire	NON[↓]	NON[↓]	OUI[2]
Treillis géométrique	NON[→]	NON[4,5]	OUI[↑]
Treillis des partitions	NON[4]	OUI[6]	OUI[↑]
Demi-treillis à médianes	OUI[7]	OUI[←]	OUI[←]
Demi-treillis distributif	NON[→]	NON[4]	NON[←]
Demi-treillis inférieurement localement distributif	NON[↑]	NON[↑]	NON[↑]
Demi-treillis des ordres	NON[8]	OUI[8]	OUI[←]

[1] Monjardet (1980) ; [2] Leclerc (1990) ; [3] Jinlu et Boukaabar (2000) ; [4] Leclerc (1994) ; [5] Barthélemy et Leclerc (1995) ; [6] Régnier (1965) ; [7] Leclerc (1993) ; [8] Leclerc (2003)

Résultat obtenu d'après le résultat de : [←] la case de gauche ; [→] la case de droite ; [↑] la case du dessus ; [↓] la case du dessous

Remerciement. Je tiens à remercier Olivier Hudry dont le considérable travail éditorial a permis de nombreuses améliorations de ce texte.

BIBLIOGRAPHIE

BANDELT H.J., BARTHÉLEMY J.-P. (1984), "Medians in Median Graphs", *Discrete Applied* Mathematics 8, p. 131-142.

BARBUT M. (1961), « Médianes, distributivité, éloignements », note Centre de Mathématique Sociale et *Mathématiques et Sciences humaines* 70, 1980, p. 5-31.

BARTHÉLEMY J.-P. (1976), « Sur les éloignements symétriques et le principe de Pareto », *Mathématiques et Sciences humaines* 56, p. 97-125.

BARTHÉLEMY J.-P. (1977), « À propos des partitions centrales sur un ensemble non nécessairement fini », *Statistique et analyse des données* 3, p. 54-62.

BARTHÉLEMY J.-P. (1979), *Propriétés métriques des ensembles ordonnés. Comparaison et agrégation des relations binaires*, Thèse de doctorat de l'université de Franche-Comté.

BARTHÉLEMY J.-P. (1979), « Caractérisations axiomatiques de la distance de la différence symétrique entre des relations binaires », *Mathématiques et Sciences humaines* 67, p. 85-113.

BARTHÉLEMY J.-P. (1981), « Procédures métriques d'agrégation », P. Batteau, E. Jacquet-Lagrèze, B. Monjardet (éds), *Analyse et agrégation des préférences pour les sciences économiques, sociales et de gestion*, Paris, Economica, p. 123-151.

BARTHÉLEMY J.-P., MONJARDET B. (1981), "The median procedure in social choice theory and cluster analysis", *Mathematical Social Sciences* 13, p. 235-567.

BARTHÉLEMY J.-P., LECLERC B. (1995), "The median procedure for partitions", I.J. Cox, P. Hansen et B. Julesz (éds), *Partitioning data sets*, Providence (RI), Amer. Math. Soc., p. 3-34.

CASPARD N., LECLERC B., MONJARDET B. (2007), *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats, usages*, Springer-Verlag, version révisée : *Finite ordered sets: concepts, results and uses*, Cambridge University Press, 2012.

FELDMAN J. (1973), « Pôles, intermédiaires et centres dans un groupe d'opinions », *Mathématiques et Sciences humaines* 43, p. 39-54.

FISHBURN P.C. (1981), "Inverted orders for monotone scoring rules", *Discrete Applied Mathematics* 3, p. 27-36.

FRECHET M. (1949), « Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen », *Les Conférences du Palais de la Découverte*, Paris.

HUDRY O., LECLERC B., MONJARDET B., BARTHÉLEMY J.-P. (2006), « Médianes métriques et latticielles », D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot et H. Prade (éds), *Méthodes pour l'aide à la décision*, Chapitre 6 du volume 3, Paris, Hermès, p. 271-312.

HUDRY O., LECLERC B., MONJARDET B., BARTHÉLEMY J.-P. (2009), "Metric and latticial medians", D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot and H. Prade (éds), *Concepts and Methods of Decision Making*, chapter 20, Wiley-ISTE, p. 763-803.

JACQUET-LAGRÈZE E. (1978), « Analyse d'opinions valuées et graphes de préférences », *Mathématiques et Sciences humaines* 37, p. 5-25.

JINLU L., BOUKAABAR K. (2000), "Singular points and an upper bound of medians in upper semimodular semilattices", *Order* 17(3), p. 287-299.

KEMENY J. G. (1959), "Mathematics without numbers", *Daedalus* 88, p. 577-591.

LECLERC B. (1990), "Medians and majorities in semimodular lattices", *SIAM Journal of Discrete Mathematics* 3, p. 266-276.

LECLERC B. (1993), "Lattice valuations, medians and majorities", *Discrete Mathematics* 111, p. 345-356.

LECLERC B. (1994), "Medians for weight metrics in the covering graphs of semilattices", *Discrete Applied Mathematics* 49, p. 281-297.

LECLERC B. (2003), "The median procedure in the semilattice of orders", *Discrete Applied Mathematics* 127(2), p. 241-269.

MONJARDET B. (1973), « Tournois et ordres médians pour une opinion », *Mathématiques et Sciences humaines* 43, p.55-70.

MONJARDET B. (1990), « Sur diverses formes de la 'règle de Condorcet' d'agrégation des préférences », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* 111, p. 61-71.

PARETO V. (1909), *Manuel d'économie politique*, V.Giard et E. Brière (éds), Paris, réédition 1981, Genève, Droz.

RÉGNIER S. (1965), « Sur quelques aspects mathématiques des problèmes de classification automatique », *ICC Bull.* 4, p. 175-191, réimpression (1983), *Mathématiques et Sciences humaines* 82, p. 13-29.