Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

175 | 2006
175, Varia

Le diamètre d'ordre 0 : une mesure « naturelle » d'étalement

Order 0 diameter. A "natural" measure of scattering

Nicolas Gauvrit et Jean-Paul Delahaye

Édition électronique
URL : http://msh.revues.org/3553
DOI : 10.4000/msh.3553
ISSN : 1950-6821

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 1 décembre 2006
Pagination : 41-51
ISSN : 0987-6936

Math. & Sci. hum. ~ Mathematics and Social Sciences (44e année, n° 175*, 2006*(3), p. 41-51)

LE DIAMÈTRE D'ORDRE 0 : UNE MESURE « NATURELLE » D'ÉTALEMENT

Nicolas GAUVRIT[1], Jean-Paul DELAHAYE[2]

RÉSUMÉ – *Pour mesurer le caractère plus ou moins étalé d'un ensemble de points, plusieurs mesures mathématiques existent, presque toutes fondées sur l'étude des distances entre points. Le concept d'étalement est cependant suffisamment ambigu pour qu'il soit impossible d'en donner une définition formelle unique. L'indice le plus utilisé dans le cadre des données bidimensionnelles, à savoir l'indice de Gini, ne rend par exemple compte que d'une certaine conception de l'étalement. Nous montrerons que cette mesure d'étalement est incompatible avec la perception naturelle de l'étalement, mais qu'un indice de Gini modifié (le diamètre d'ordre 0) coïncide significativement avec la perception des sujets.*

MOTS-CLÉS – Étalement, Indice de Gini, Perception, Probabilité subjective

SUMMARY – Order 0 diameter. A "natural" measure of scattering
Several mathematical measures are used to rate the scattered or clustered characteristics of a point pattern. Most of these parameters are based on the list of one-to-one distance between points of the pattern. The very notion of scattering is, however, ambiguous, and such parameters can only capture one particular view of "scatter". The most widespread parameter, when it comes to assess scatter of spatial data, is Gini's mean distance. We will show that this index favours a notion of scatter that is incompatible with subjects' perception. We will then suggest the use of a modified Gini's parameter (order 0 diameter). This alternative parameter will be proven to fit people's perception of scatter.

KEYWORDS – Gini's mean distance, Perception, Scatter, Subjective probability

1. INTRODUCTION

Dans le traitement des données spatiales bidimensionnelles, il est souvent utile de pouvoir mesurer le caractère plus ou moins « étalé » ou, au contraire, aggloméré, d'un ensemble de points dans une aire définie. En botanique, l'emplacement d'entités biologiques (plantes par exemple) peut ainsi être caractérisée en termes d'affinité ou de répulsion. En épidémiologie, la dispersion des foyers d'infection permet de mieux cerner le processus de contamination (cf. par exemple [Cressie, 1991]).

Des questions récentes en psychologie nécessitent-elles aussi le recours à une mesure de dispersion ou d'étalement. Dans une étude portant sur la simulation humaine du hasard, Falk [1981] a demandé à des sujets de choisir, sur un damier, plusieurs cases *au hasard*. Il est apparu que les sujets privilégient des motifs contenant peu de cellules (cases) adjacentes, en tout état de cause moins que ce que donnerait un véritable tirage

[1] Laboratoire DIDIREM, Paris VII, adems@free.fr
[2] Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, Université de Lille, delahaye@lifl.fr

aléatoire de cellules. Autrement dit, les sujets privilégient des motifs particuliers, plus réguliers que ceux donnés par un véritable tirage aléatoire, en écartant en quelque sorte les cellules choisies. Ainsi, les réponses (motifs) des sujets sont-elles trop régulières, ou trop « étalées ».

Généralisant au cas continu les résultats de Falk [1981], Delahaye [2002] fit l'hypothèse que des sujets à qui l'on demanderait de placer des points aléatoires dans une figure choisiraient sans doute des motifs « trop étalés ». Cette hypothèse, pour être testée, nécessite évidemment l'utilisation d'une mesure *d'étalement*, et si possible d'une mesure d'étalement compatible avec la perception naturelle de cette caractéristique des nuages de points.

Dans la plupart des cas où des chercheurs ont à mesurer l'étalement d'un ensemble de points, ils utilisent des méthodes fondées sur l'utilisation de la liste des distances caractérisant les couples de points de l'ensemble.

Dans le cas unidimensionnel, l'indice d'étalement le plus répandu (pour ne pas dire le seul) est l'écart type. Or, l'écart type n'est rien d'autre qu'une distance moyenne. Si l'on considère en effet une série finie $x(1), \ldots, x(n)$ de nombres réels, et en notant d_{ij} la distance entre les points $x(i)$ et $x(j)$, l'écart type de la série apparaît comme la moyenne quadratique des d_{ij}, pour i et j variant entre 1 et n (à un coefficient multiplicatif près, ne dépendant que de n).

Cette conception de l'étalement comme distance moyenne se généralise sans difficulté au cas multidimensionnel. Pour cela, on peut commencer par généraliser la notion de moyenne, pour définir ensuite les diamètres d'ordre r.

1.1 MOYENNES D'ORDRE *R*

Pour tout vecteur à coordonnées positives $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ (donc pour toute suite finie de n réels positifs), on définit la moyenne d'ordre r, notée m_r, par la formule suivante, valable pour tout réel r non nul si les x_i sont tous non nuls, et pour tout r strictement positif sinon :

$$m_r(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_i x_i^r\right)^{1/r}$$

On reconnaît certains cas particuliers : m_1 est la moyenne arithmétique usuelle, m_2 la moyenne quadratique, m_{-1} la moyenne harmonique.

On note m_0 la limite des m_r lorsque r tend vers 0. m_0 est alors la moyenne géométrique, définie par :

$$m_0(x_1,\ldots,x_n) = \sqrt[n]{\prod_i x_i}$$

De la même manière, on peut définir en utilisant les limites de m_r :

$$m_{+\infty}(x_1,\ldots,x_n) = \max_i(x_i)$$

et

$$m_{-\infty}(x_1,\ldots,x_n) = \min_i(x_i).$$

Si l'un des x_i est nul, m_r n'est pas défini pour $r < 0$. Pour cette raison, nous ne considérons dans la suite, sauf mention du contraire, que des valeurs de r positives.

Notons enfin, pour terminer avec les moyennes d'ordre r, que si r est supérieur à 1, m_r est une norme. Si au contraire $r < 1$, m_r est sous-additive et n'est plus une norme.

1.2 DIAMÈTRE D'ORDRE r

Considérons une famille finie de points $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ dans un espace métrique. Notons d_{ij} la distance entre les points x_i et x_j.

On appelle *diamètre d'ordre r* la moyenne d'ordre r des d_{ij} :

$$D_r(E) = \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij}^r \right)^{1/r}$$

Dans le cas où l'espace est **R** muni de la distance canonique, D_2 est l'écart-type. Dans le cas général, on reconnaît certains indices. Ainsi, D_2 est l'indice de Greenwood. La limite pour r tendant vers l'infini D_∞ est le « diamètre » au sens usuel en mathématique, ou « étendue » $max(d_{ij})$.

Enfin, D_1 est appelé *indice de Gini*. Cette moyenne arithmétique des distances est une des mesures d'étalement de loin les plus fréquentes pour le traitement des données bidimensionnelles [Cressie, 1991].

Si l'indice de Gini a prouvé son utilité dans divers domaines scientifiques, son adéquation avec la perception naturelle de l'étalement est douteuse. La notion même d'étalement, à vrai dire, est mal définie, même mathématiquement. Certes, des critères de pertinence mathématique ont été proposés [Bickel, Lehmann, 1976], mais ils laissent la porte ouverte à des interprétations variées, et parfois contradictoires. Ces critères, énoncés sous forme d'axiomes, se résument en effet à deux principes, à savoir :

- l'homogénéité, selon laquelle une homothétie de rapport k (positif) multiplie l'étalement par k
- l'invariance par translation, selon laquelle la position de l'ensemble des points n'a pas d'effet sur son étalement.

L'idée à la base de la mise en place de l'indice de Gini est d'utiliser la liste des distances entre points, en considérant tous les couples de points pris deux à deux. Cette idée conduit à considérer la série des d_{ij}. Un motif de points est « étalé » si les d_{ij} sont, globalement, les plus grands possibles. Toute la question est de savoir quelle importance relative il faut accorder aux différentes distances d_{ij} : un motif est-il étalé s'il existe de grandes distances parmi les d_{ij}, ou bien plutôt s'il n'existe pas de petites distances ? On peut imaginer l'indice de Gini comme un compromis entre deux extrêmes également insatisfaisants.

Si l'on accorde une importance relative infinie aux plus grandes distances, on pourra dire qu'un ensemble de points est étalé si la plus grande distance d_{ij} est suffisamment importante. Cela conduit à utiliser comme mesure d'étalement le maximum des d_{ij} c'est-à-dire l'étendue D_∞.

Si, à l'autre bout du spectre, on accorde une importance infinie aux plus petites distances, on dira qu'un ensemble de points est étalé si toutes les distances restent suffisamment grandes. Cela conduit à définir comme mesure d'étalement le minimum des distances (D_-), et correspond à ce qu'on pourrait appeler étalement-régularité dans la mesure où les motifs les plus étalés au sens de cette mesure sont des motifs réguliers (pour un exemple, cf. Figure 1).

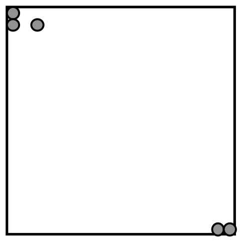

Figure 1. Motifs de 5 points dans un carré maximisant l'étendue (à gauche) et l'étalement-régularité (à droite), définie comme la distance minimale entre deux points du motif

L'indice de Gini, bien qu'il prenne en compte toutes les distances et se situe donc quelque part entre ces deux visions caricaturales de l'étalement, semble trop proche de l'étendue. Dans une expérience récente, Gauvrit et Delahaye [2005] ont demandé à des sujets de classer en termes d'étalement des ensembles de points disposés soit sur un cercle, soit dans un carré, et imprimés sur des cartes. Parmi les différents motifs utilisés sur le cercle, l'un maximisait l'indice de Gini, et un autre maximisait la régularité (cf. Figure 2). Les résultats des auteurs sont très nets, puisque toutes les personnes interrogées ont perçu comme plus étalé celui des deux motifs qui maximisait la régularité. Les réponses concernant les nuages disposés dans des carrés donnent des résultats similaires.

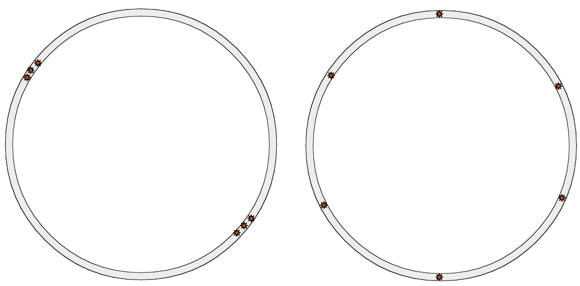

Figure 2. Motifs maximisant l'indice de Gini (à gauche) et la régularité (à droite). Les sujets perçoivent le motif de droite comme plus étalé

De cela, on peut conclure que l'indice de Gini accorde une trop grande importance aux plus grandes distances pour être compatible avec la perception naturelle de l'étalement. Mais cela n'implique pas qu'il faille abandonner totalement l'idée de cette mesure d'étalement. Nous pouvons en effet piocher dans la famille des D_r un autre indice que D_1. L'indice de Gini est la moyenne arithmétique des distances, dont nous venons de voir qu'elle accordait trop d'importance aux grandes valeurs par rapport aux petites valeurs. Or, une alternative à la moyenne arithmétique, qui possède justement la propriété d'accorder plus d'importance aux plus petites valeurs, existe, et c'est la moyenne géométrique, définie en général comme la racine n-ième du produit de n valeurs. En fait, cette moyenne dépend tellement des plus petites valeurs que si l'une des distances est nulle, alors la moyenne géométrique l'est aussi. On peut ainsi considérer un nouvel indice d'étalement, qui vérifie les axiomes de pertinence mathématique de Bickel et Lehmann, à savoir D_0, diamètre d'ordre 0, qui est la moyenne géométrique des distances.

Dans cet article, nous exposons des résultats expérimentaux montrant que les sujets présentent une perception de l'étalement qui a plus en commun avec le diamètre d'ordre 0 qu'avec l'indice de Gini classique, diamètre d'ordre 1 (expérience A), et que cette perception de l'étalement est, en termes d'accord et de temps de réponse, compatible avec le diamètre d'ordre 0 (expérience B).

2. EXPÉRIENCE A

Une méthode simple permettant de comparer les deux indices d'étalement que sont l'indice de Gini et le diamètre d'ordre 0 est de relever dans quel ordre sont classés des patterns de points selon chacun des deux indices. Cela revient à étudier la notion de « plus étalé » qui découle de chacun des paramètres. Fonder ces comparaisons sur des patterns aléatoires peut sembler une approche naturelle.

Pour chaque couple de nuages de points aléatoires, l'un des deux nuages est en effet considéré comme plus étalé que l'autre au sens de chacun des deux indices. Il est évident que la comparaison des indices ne sera pertinente que sur des couples d'ensembles de points qui ne présentent pas le même classement selon qu'on utilise l'indice D_1 ou D_0. C'est sur ces couples particuliers que se fonde l'expérience A. La Figure 3 donne un exemple de tel couple.

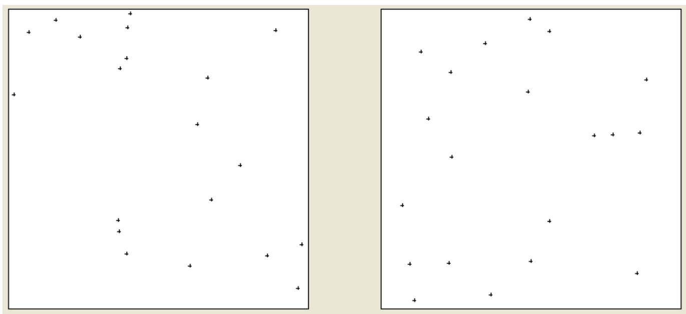

Figure 3. Deux motifs qui ne sont pas rangés dans le même ordre par les indices D_0 et D_1. Pour l'indice de Gini, le motif de gauche est plus étalé (avec une mesure d'étalement de 0,662 contre 0,549 à droite). Au contraire, il est moins étalé au sens du diamètre d'ordre 0 (0,475 à gauche contre 0,484 à droite)

2.1 MÉTHODE

8 sujets ont participé à l'expérience (4 hommes, 4 femmes). L'âge des participants, qui sont tous des étudiants en première année de psychologie, variait de 19 à 24 ans.

Un programme spécifique a été créé en *Pascal* sous *Delphi 5 professionnel.* Lorsque les participants sont prêts, ils cliquent sur un bouton « OK ». Deux carrés (de 320 pixels de côté) apparaissent à l'écran. Le logiciel engendre alors deux nuages aléatoires de n points (n valant selon le cas 5, 10, 30 ou 80), disons (a) et (b). Si les nuages sont classés dans le même ordre par les indices D_0 et D_1, un nouveau couple est engendré. Sinon, les nuages sont affichés sur les deux carrés (cf. Figure 4). Les participants doivent alors cliquer sur celui des deux ensembles de points qui leur paraît le plus étalé. Ils sont informés au préalable que le temps de réponse est sans importance. Cette tâche est effectuée 20 fois par chaque participant et pour chaque valeur de n (5, 10, 30, 80).

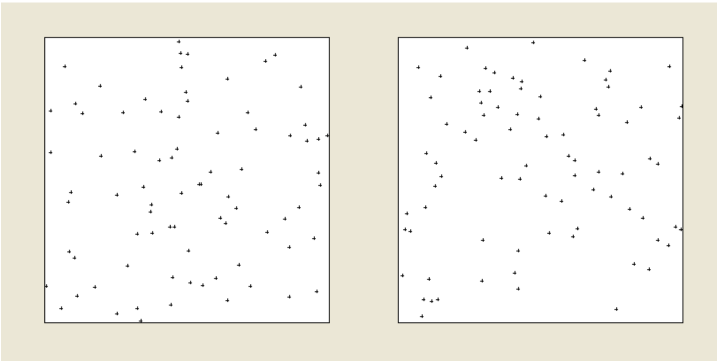

Figure 4. Capture partielle d'écran correspondant à l'expérience A (cas $n = 80$)

2.2 RÉSULTATS

Pour chaque paire de nuages de points, et pour chaque participant, on obtient nécessairement une réponse conforme à l'un des deux classements exactement, donc un accord avec l'indice de Gini ou avec le diamètre d'ordre 0. Ceci est la conséquence directe du choix des paires de patterns. Aussi, il suffit pour traiter les données de considérer le seul accord avec l'un des deux indices. Nous avons considéré – c'est notre variable dépendante – l'accord entre la réponse du sujet et le classement donné par le diamètre d'ordre 0.

Le taux d'accord varie en fonction de n, allant de 67 % ($n = 5$) à 84 % ($n = 80$).

L'accord entre la réponse fournie par les sujets et celle prévue par le diamètre d'ordre 0 ne diffère pas significativement d'un sujet à l'autre, comme le montre le khi^2 d'indépendance entre les variables « sujet » et « accord » (khi$^2 = 7.76$, $p = 0.36$). Ce résultat pourrait en partie justifier l'utilisation de méthodes statistiques reposant sur une hypothèse d'égalité des sujets.

Cependant, il est préférable de tenir compte de la structure de l'expérience. Pour cela, nous utilisons dans la suite du traitement statistique les conventions suivantes : un individu statistique est un couple formé par un sujet et une série de 20 paires de patterns. Pour chaque valeur de n (traitée séparément des autres), la nouvelle variable à considérer est alors le taux d'accord (par sujet). Ce taux est systématiquement supérieur à 60 % (soit 12 accords sur 20 essais), comme on peut le voir sur le Tableau 1.

sujet n° / *n*	1	2	3	4	5	6	7	8
5	15	12	13	14	13	13	12	16
10	12	17	12	14	16	17	18	17
30	16	16	19	16	18	17	16	17
80	13	13	17	15	15	18	12	18

Tableau 1. Nombre d'accords sur 20 essais
pour chaque sujet et chaque valeur de *n*

Le taux d'accord moyen (moyennes des taux d'accord par sujet) est significativement supérieur à 50 %, quelle que soit la valeur de *n*. Les tests de Student pour échantillons uniques permettent de conclure que, pour toute valeur de *n*, l'accord moyen est supérieur à 50 %, la plus petite valeur de *p* étant inférieure à 0,0001. La Figure 5 confirme que les intervalles de confiance pour la moyenne des proportions d'accord sont tous entièrement au-dessus de la valeur critique de 50 % (0,5).

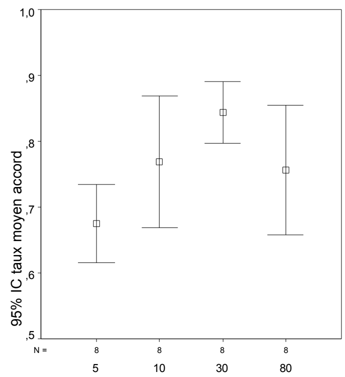

Figure 5. Intervalle de confiance au niveau 95 % pour la proportion
d'accord moyenne (moyenne des taux par sujets) entre les sujets
et le diamètre d'ordre 0, pour les différentes valeurs de *n*
(nombre de points dans chaque nuage)

2.3 DISCUSSION

La perception de l'étalement par les sujets est plus proche de la définition de l'étalement donné par le diamètre d'ordre 0 que par l'indice de Gini, puisque le taux d'accord entre les sujets et le diamètre d'ordre 0 reste supérieur à 50 %. Ce résultat est applicable à chacun des sujets observés pris individuellement et n'est pas seulement un résultat moyen, puisque les taux d'accord des différents participants sont tous, pour toute valeur testée de *n*, supérieurs à 60 %. Le fait que ce taux d'accord dépende (en restant toutefois significatif) de *n* n'est pas exploitable directement, notamment parce que les tirages aléatoires de 80 points sont, par exemple, moins susceptibles de présenter des différences fondamentales que les échantillons de 5 points. Aussi est-il délicat d'attribuer à la perception des sujets une dépendance vis-à-vis de la taille des nuages.

3. EXPÉRIENCE B

Le fait, avéré par l'expérience A, que la perception naturelle de l'étalement ait plus de proximité avec le diamètre d'ordre 0 qu'avec l'indice de Gini, ne prouve pas que, dans le cas de nuages totalement aléatoires, le diamètre d'ordre 0 constitue une bonne mesure d'étalement (c'est-à-dire conforme à la perception naturelle de l'étalement).

Dans l'expérience B, nous allons nous concentrer sur l'adéquation entre le diamètre d'ordre 0 et la perception naturelle de l'étalement. Le principe de l'expérience est relativement similaire à celui de l'expérience A et se fonde sur des comparaisons par paires.

Dans la suite, on notera G le diamètre d'ordre 0. Nos prévisions, si G est un indice pertinent, sont que :

1) le taux d'accord entre les sujets et G est supérieur à 50 % ;
2) le taux d'accord entre les sujets et G augmente avec la différence entre les deux valeurs de G ;
3) le temps de réponse des sujets diminue quand la différence entre les deux valeurs de G augmente.

3.1 MÉTHODE

10 sujets (5 hommes, 5 femmes) ont participé à cette expérience. Les âges variaient de 19 à 23 ans au moment de la passation. Tous étaient étudiants en première année de psychologie.

Un programme spécifique a été écrit en *Pascal* sous *Delphi 5 professionnel* pour cette expérience. Le principe était le même que dans le cadre de l'expérience A. Deux carrés de 320 pixels de côté apparaissent à l'écran. Des nuages de points aléatoires sont ensuite déterminés et affichés sur les deux carrés. La disposition des carrés était la même que dans l'expérience A. En revanche, aucune contrainte n'était imposée aux nuages de points.

La consigne différaient de celle de la première expérience parce qu'on demandait au sujets de répondre « le plus vite possible, mais en faisant toutefois bien attention à ne pas se tromper ». Il s'agissait, là encore, de cliquer sur celle des figures qui semblait « la plus étalée ».

Les nuages de points utilisés étaient composés de 10, 20 ou 30 points (mais à chaque fois, les deux nuages ont le même nombre de points). Ce nombre de points est tiré aléatoirement par l'ordinateur à chaque fois que la tâche est réalisée. Chaque participant effectuait la tâche 45 fois.

3.2 RÉSULTATS

Les variables utilisées dans le traitement des données sont :

1) la réponse des sujets (a ou b selon le nuage choisi) ;
2) le temps de réponse (en centièmes de secondes) ;
3) le nombre n de points constituant les patterns et

4) la différence entre les indices $G(a)$ et $G(b)$, que l'on note d. On a donc $d = G(b) - G(a)$.

3.2.1 Accord

Pour traiter les données de manière inférentielle classique, nous passons par les taux d'accord par sujet. Comme pour l'expérience A, tous les sujets sans exception ont un taux d'accord supérieur à 0,5. La moyenne des taux d'accord, de 0,656, est significativement supérieure à 0,5 selon le test de Student ($t = 7{,}69$, $p < 0{,}001$).

3.2.2 Probabilité de réponse en fonction de d

La probabilité pour un sujet de donner la réponse (b) dépend grandement de la différence entre les deux valeurs de G. En traitant les résultats sujet par sujet, on trouve que, pour les 10 sujets sans exception, les données vont dans le sens voulu (dans la régression logistique, la fonction de probabilité est toujours décroissante). Les statistiques de Wald et leurs significations sont données dans le Tableau 2. Elles montrent que les résultats sont significatifs au risque de 5 % pour 5 des 10 sujets, les 5 sujets restants donnant des valeurs de p ne dépassant jamais 18 %.

Wald	8,029	1,878	2,113	2,510	3,261	7,966	3,984	6,269	9,995	3,056
p	0,005	0,171	0,144	0,143	0,071	0,005	0,046	0,012	0,002	0,059

Tableau 2. Statistiques de Wald et signification par sujet
(à chaque colonne correspond un sujet)

3.2.3 Temps de réponse

Si l'on traite les données sujet par sujet, on constate que toutes les corrélations entre le temps de réponse et la valeur absolue de d sont négatives, et que 9 d'entre elles sont significatives au risque de 5 %. Tout cela est présenté dans le Tableau 3.

r	-0,386	-0,388	-0,277	-0,380	-0,374	-0,359	-0,348	-0,345	-0,343	-0,327
p	0,009	0,008	0,065	0,010	0,011	0,015	0,019	0,020	0,021	0,028

Tableau 3. Corrélation entre le temps de réponse et la valeur absolue de *d*
par sujet, et signification correspondante (à chaque colonne correspond un sujet)

3.3 DISCUSSION

Le taux d'accord brut reste, pour les différents n testés, significativement supérieur à 50 %. Les valeurs trouvées peuvent pourtant sembler relativement faibles. Par exemple $kappa = 0.20$ pour $n = 10$ signifie que 20 % seulement des cas qui ne peuvent pas correspondre à des accords fortuits correspondent toutefois à une « bonne réponse ». Il faut cependant se souvenir que l'indice G est une moyenne, effectuée sur un ensemble de distances aléatoires. Aussi, la différence entre deux G aléatoires est-elle probablement d'autant plus faible que n est grand, et l'effet est potentiellement notable dès $n = 10$. C'est pourquoi la plupart des paires de nuages utilisés sont, par rapport à des cas extrêmes, très proches en termes d'étalement. Cela explique probablement que le taux d'accord ne soit pas spectaculaire.

La régression logistique montre que, de manière significative – sous l'hypothèse d'indépendance –, les réponses des sujets sont d'autant plus « fiables » que l'écart *d* est grand. La Figure 6 montre ainsi que la probabilité estimée d'une réponse correcte avoisine et dépasse même les 80 % pour des valeurs de *d* supérieures à 2 ou inférieures à -2. Cela indique qu'une plus grande différence d'étalement au sens de *G* entre deux figures rend la discrimination plus simple. Ainsi, ce n'est pas seulement l'ordre des étalements au sens de *G* qui présente une certaine pertinence psychologique, mais aussi l'écart entre les mesures d'étalement. La méthode utilisée pour construire la courbe de la Figure 6 n'est légitime que si elle est comprise comme purement descriptive, ou moyennant une hypothèse d'indépendance. Il faut donc recourir, pour une interprétation inférentielle, aux traitements sujet par sujet. Bien que tout sujet ne donne pas de résultats significatifs, on peut rejeter l'hypothèse nulle d'indépendance générale entre la réponse et *d*.

Si cette hypothèse était juste en effet, on aurait dû trouver environ 50 % de sujets donnant une fonction de probabilité croissante, et non 0 %. La probabilité, sous l'hypothèse nulle, d'observer 0 % de fonction croissante est $p < 0{,}001$. D'autre part, la proportion de résultats significatifs au risque de 5 % aurait dû être de 5 % environ, et non 50 %.

4. CONCLUSION

Nous avons montré, grâce à l'expérience A, que la perception naturelle de l'étalement présente une ressemblance plus grand avec le diamètre d'ordre 0 qu'avec l'indice de Gini classique. Ce résultat plaide en faveur du diamètre d'ordre 0, mais ne suffit pas à mesurer la qualité de cet indice.

Grâce à l'expérience B, nous avons pu montrer que la perception naturelle de l'étalement est compatible avec le diamètre d'ordre 0. Cela est vrai en ce qui concerne l'ordre associé à l'étalement, donc la notion de « plus étalé ». Mais c'est vrai également pour ce qui concerne les temps de réponse, et donc pour ce qui a trait à la « distance » entre deux étalements.

Bien entendu, le diamètre d'ordre 0 n'est pas une panacée et l'accord constaté entre la perception naturelle de l'étalement et le diamètre d'ordre 0 n'est, quoique significatif, pas parfait. Il est d'ailleurs probable que des facteurs externes, comme la position du motif à l'intérieur de la forme ou des effets de bord, influencent les jugements des sujets, ce qui constitue un handicap dirimant à la définition d'une mesure idéale.

Toutefois, le diamètre d'ordre 0 apparaît comme une mesure convenable, tant mathématiquement (puisqu'il vérifie les axiomes de Bickel et Lehmann) que psychologiquement, puisqu'il présente une similitude notable avec la perception des sujets. En tout état de cause, c'est une meilleure mesure d'étalement chaque fois que le but recherché est d'approcher la perception des sujets normaux. Ainsi, nous recommandons l'utilisation de cet indice comme une alternative à l'indice de Gini classique chaque fois qu'il faudra mesurer un étalement d'une manière psychologiquement pertinente.

Enfin, la définition de l'indice de Gini, mais aussi du diamètre d'ordre 0, est valable dans n'importe quel espace métrique. En particulier, on peut l'appliquer en dimension 1 ou 3. Il pourrait être utile de vérifier que l'adéquation du paramètre G n'est pas symptomatique de la dimension 2, et reste valable dans des espaces plus généraux, ou du moins de dimension différente.

Remerciements. Les auteurs remercient les deux experts anonymes, qui, par leurs remarques complémentaires pertinentes, ont permis une amélioration très nette de l'article, tant pour la partie théorique que pour le traitement des données de l'expérience.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BICKEL P. J., LEHMANN E. L., "Descriptive statistics for nonparametric models III. Dispersion", *Annals of Statistics* 4, 1976, p. 1139-1158.

CRESSIE N., *Statistics for spatial data*, New York, John Wiley and Sons, 1991.

DELAHAYE J.-P., « Notre vision du hasard est bien hasardeuse », *Pour la science* 293, 2002, p. 98-103.

FALK R., "The perception of randomness", *Proceedings of the fifth international conference for the psychology of mathematics education* 1, 1981, p. 222-229.

GAUVRIT N., DELAHAYE J.-P., "Gini's generalized index and perceived scatter", *International Meeting of the Psychometric Society*, 5-8 juillet 2005, Tilburg (Pays-Bas).

HOWELL D. C., *Méthodes statistiques en sciences humaines*, Bruxelles, De Boeck Université, 1998.