Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

163 | 2003
n° 163, Théorie du choix social : cinquantenaires

De Condorcet à Arrow via Guilbaud, Nakamura et les "jeux simples"

From Condorcet to Arrow via Guilbaud, Nakamura and the "simple games"

Bernard Monjardet

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition électronique
URL : http://msh.revues.org/2917
DOI : 10.4000/msh.2917
ISSN : 1950-6821

Édition imprimée
Date de publication : 1 septembre 2003
ISSN : 0987-6936

Référence électronique
Bernard Monjardet, « De Condorcet à Arrow via Guilbaud, Nakamura et les "jeux simples" », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 163 | Automne 2003, mis en ligne le 10 février 2006, consulté le 14 octobre 2016. URL : http://msh.revues.org/2917 ; DOI : 10.4000/msh.2917

Math. & Sci. hum. / *Mathematics and Social Sciences* (41e année, n° 163*, 2003,* p. 5-32)

DE CONDORCET À ARROW VIA GUILBAUD, NAKAMURA ET LES « JEUX SIMPLES »[1]

Bernard MONJARDET[2]

RÉSUMÉ - Ce texte a pour but de présenter le théorème d'Arrow et plus généralement la structure commune à de nombreux résultats « arrowiens » montrant la difficulté d'agréger des préférences individuelles en une préférence collective. On commence par rappeler "l'effet Condorcet », cause de « l'échec » de la règle majoritaire. Cette règle est un exemple de règle définie par un « jeu simple » et, à la suite de Guilbaud, on cherche ensuite si parmi de telles règles on peut en trouver de plus satisfaisantes. La réponse, plutôt négative, est donnée par les théorèmes de Guilbaud et de Nakamura. Adoptant ensuite une démarche axiomatique, on montre que des règles vérifiant les propriétés d'indépendance et de Pareto et évitant « l'effet Condorcet » sont définies par un « jeu simple », ce qui permet d'obtenir des théorèmes arrowiens et finalement le théorème d'Arrow. La dernière section donne des indications sur les nombreux développements montrant la robustesse de ce théorème.

MOTS-CLÉS - Agrégation des préférences, Effet Condorcet, Jeu simple, Théorème d'Arrow, Théorème de Guilbaud, Théorème de Nakamura, Ultrafiltre.

SUMMARY – From Condorcet to Arrow via Guilbaud, Nakamura and the *"*simple games*"*.
The aim of this paper is to present Arrow's theorem and more generally the common framework of many results which can be called "Arrovian theorems". We begin by recalling the Condorcet majority rules and why they fail: the so called "effet Condorcet". These rules are examples of preference aggregation functions defined by a simple game, and then following Guilbaud's approach, we seek if in the class of all these functions we can find some functions avoiding this problem. The rather negative answer is given by the Guilbaud and Nakamura theorems. Taking then an axiomatic approach we show that some independent and Paretian preference aggregation functions avoiding the "effet Condorcet" are defined by a simple game. So the previous results allow to get several Arrovian theorems and finally Arrow's theorem. In the last section we give some historical and bibliographical comments on these results and on several developments showing essentially the robustness of Arrow's theorem.

KEY WORDS - Arrow's theorem, Effet Condorcet, Guilbaud's theorem, Nakamura's theorem, Simple game, Social choice, Ultrafilter.

Mathematical Subject Classification : 91 ; JEL Classification number : D71

---

[1] Article reçu le 18.10.2002, révisé le 07.03.2003, accepté le 20.03.2003.
[2]CAMS, EHESS 54 bd Raspail, 75270 Paris Cedex O6, et CERMSEM, Université Paris I, monjarde@univ-paris1.

1. INTRODUCTION

Le théorème d'Arrow [Arrow, 1951] a été un résultat déterminant dans l'étude mathématique des mécanismes d'agrégation de préférences individuelles en une préférence collective. Rappelons qu'il montre que si ces mécanismes satisfont certaines conditions jugées *a priori* souhaitables, ils ne peuvent être que « dictatoriaux », c'est-à-dire se conformer à la préférence d'un seul individu. En introduisant dans ce domaine, d'une part le formalisme de la théorie des relations, d'autre part l'approche axiomatique, et en montrant l'existence de résultats d'impossibilité en économie, Arrow a été l'initiateur d'un considérable courant de recherches appelé la *théorie du choix social*[3]. Le but de cet article n'est pas de donner la plus courte preuve de la version « classique » du théorème d'Arrow[4]. Il est de présenter la structure commune de nombreux résultats qu'on peut appeler des « théorèmes arrowiens ». La démarche usuelle pour présenter ces résultats est axiomatique. On commence par définir de « bonnes » fonctions d'agrégation des préférences comme des fonctions satisfaisant certaines conditions jugées raisonnables. Puis on considère les familles *d'ensembles décisifs* de votants associées à ces fonctions, où un ensemble de votants est dit décisif si lorsque tous ses membres ont la même préférence, il peut l'imposer comme préférence collective. On montre ensuite que ces familles ont une structure appelée (généralement) *jeu simple*[5]. Finalement, on prouve que la classe associée de jeux simples se restreint de celle des *préfiltres* à celle des *ultrafiltres* suivant que l'ensemble de préférences collectives admises est de plus en plus réduit. Dans le cas où le nombre de votants est fini, le cas des ultrafiltres correspond au cas dictatorial.

À la suite de Guilbaud [Guilbaud, 1952], la démarche suivie dans cet article commence par rappeler le premier exemple de fonction d'agrégation des préférences associée à un jeu simple, à savoir la règle majoritaire de Condorcet et la raison de son échec : la relation de préférence majoritaire peut comporter des circuits (du type *a* préféré à *b*, qui est préféré à *c*, lui-même préféré à *a*). C'est « l'effet Condorcet » (que nos collègues anglo-saxons connaissent souvent sous le nom de "*voting paradox*"). Puis nous cherchons si, dans la classe de toutes les fonctions d'agrégation des préférences associées à un jeu simple, il existe des fonctions qui, sans introduire de discrimination entre les votants, permettent d'échapper à cet effet. Dans le cas où le jeu simple est *propre* et *fort* (Définition 4.1), la réponse apportée par Guilbaud est négative puisqu'on obtient le résultat dictatorial. Plus généralement, pour un jeu simple quelconque, le théorème de Nakamura et quelques-uns de ses corollaires apportent une réponse essentiellement négative.

Les fonctions d'agrégation des préférences associées à un jeu simple satisfont de « bonnes » propriétés telles que la condition d'*indépendance* (exprimant que la préférence collective entre deux options ne doit dépendre que des préférences

---

[3] À ce jour il existe plus de cent ouvrages sur cette théorie (cf. Annexe bibliographique, p. ?

[4]Ce que nous appelons la version classique du théorème d'Arrow n'est pas la version de l'édition originale de son livre (qui contenait des axiomes superflus ou/et insuffisants pour démontrer le théorème, Blau 1957, Arrow 1963), mais celle de la seconde édition (1963) qui est devenue la version standard.

[5] Voir la définition 4.1 ainsi que la note 15 sur l'utilisation de ce terme de jeu simple.

individuelles entre elles) et celle de *Pareto* (exprimant que les préférences individuelles unanimes doivent être des préférences collectives). Adoptant maintenant le point de vue axiomatique, nous nous demandons quelles sont les « bonnes » fonctions d'agrégation des préférences, où l'on exige d'une telle fonction qu'elle satisfasse au moins les deux conditions précédentes et qu'elle conduise toujours à une relation de préférence collective sans circuits. Puisque l'on montre que la famille des ensembles décisifs associée à de telles fonctions est un jeu simple, les résultats précédents permettent de démontrer plusieurs théorèmes arrowiens et finalement le théorème d'Arrow lui-même[6]. Ces résultats montrent que "the paradox arising in majority voting is a general phenomenon which holds for all social choice mechanisms satisfying some reasonable conditions" [Arrow, 1977], étant entendu que pour Arrow la condition d'indépendance est l'une de ces conditions raisonnables. Mais, encore plus généralement, ces résultats sont une illustration des problèmes posés par l'agrégation d'objets complexes lorsque la procédure d'agrégation commence par les décomposer en éléments simples qu'elle agrège ensuite de façon indépendante. Pour ce dernier point, sur lequel nous ne reviendrons pas ici, nous renvoyons à l'article de Guilbaud [Guilbaud, 1952] où il est magistralement présenté[7]. L'avant-dernière section de ce papier apporte quelques commentaires et précisions bibliographiques sur les résultats présentés et sur divers développements de la théorie du choix social montrant essentiellement la robustesse du théorème d'Arrow. La section finale contient les preuves des résultats des six premières sections. La démarche suivie n'est évidemment pas la plus économique pour prouver le théorème d'Arrow et une annexe en contient deux preuves courtes (dont celle d'Arrow dans son texte [Arrow, 1952]).

N. B. Dans ce texte, nous considérons des relations binaires définies sur un ensemble A fini, c'est-à-dire des sous-ensembles R de l'ensemble A^2 de tous les couples de A. Nous écrivons indifféremment $(x,y) \in R$ ou xRy, et $(x,y) \notin R$ ou $xR^c y$. La différence ensembliste entre deux ensembles A et B est notée $A \backslash B$ ou A-B. L'union ensembliste de deux ensembles disjoints A et B est notée $A + B$.

2. LE MODÈLE

$A = \{x,y,z,...\}$ est un ensemble fini de m ($\geq$ 2) éléments que nous appelons ici des candidats, mais qui suivant les contextes peuvent être aussi appelés des options, décisions, etc.

[6] Dans les cinq premières sections nous supposons que les préférences individuelles des votants sont modélisées par des ordres totaux. Cette hypothèse rend les mathématiques utilisées beaucoup plus transparentes sans changer la signification des résultats. Les modifications résultant du remplacement des ordres totaux par des préordres totaux pour les préférences individuelles sont montrées à la section 6 présentant le théorème d'Arrow ou indiquées dans les commentaires finaux.

[7] Voir aussi [B. Monjardet, 2002] qui contient une analyse de cet article et des développements qu'il a suscité.

N est un ensemble d'éléments que nous appelons ici des votants, mais qui suivant les contextes peuvent être aussi appelés individus, agents, etc. Si N est fini, nous écrivons $N = \{1,2,.....n\}$ et supposons $n \geq 2$.

Nous admettons que la préférence d'un votant sur l'ensemble A des candidats est représentée par un ordre total noté L, c'est-à-dire une relation *transitive*, *antisymétrique* et *totale*[8] (des hypothèses plus faibles seront faites à la section 6). Par la suite, un tel ordre total L sera souvent noté $x_1..x_k...x_m$ où x_1 est le premier élément (*i.e.* l'élément maximal unique) de L, x_2 le second élément de L (*i.e.* l'élément maximal unique de l'ordre L restreint à A-x_1), etc. L'ensemble des $m!$ ordres totaux définis sur A est noté $\mathcal{L}$.

Un *profil* (de préférences individuelles) est une fonction π de N dans $\mathcal{L}$, associant à chaque votant sa préférence. Nous écrivons $\pi = (L_1,...,L_i,...,L_n)$, où L_i est l'ordre total représentant la préférence du votant i sur l'ensemble A des candidats. L'ensemble de tous les profils possibles est noté $\mathcal{L}^N$.

DÉFINITION 2.1. Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de relations binaires sur A. Une ***$\mathcal{M}$-fonction d'agrégation des préférences*** est une application f de $\mathcal{L}^N$ dans $\mathcal{M}$, qui à chaque profil π de préférences individuelles fait correspondre une préférence collective $f(\pi) \in \mathcal{M}$. Nous dirons que $\mathcal{L}^N$ est le *domaine* de la fonction f et $\mathcal{M}$ son *codomaine*.

Le modèle suppose donc que la préférence collective $f(\pi)$, notée souvent R, appartient à un ensemble $\mathcal{M}$ de relations binaires. Dans le cas où cette relation de préférence R est totale, il est classique d'appeler *préférence stricte* la partie asymétrique P de R et *indifférence* sa partie symétrique I : on a $R = P + I$ avec $P = \{(x,y) \in R : (y,x) \notin R\}$ et $I = \{(x,y) \in R : (y,x) \in R\}$. Beaucoup de résultats de la théorie dépendent des hypothèses qui sont faites sur la nature de l'ensemble $\mathcal{M}$. Dans ce texte l'ensemble $\mathcal{M}$ sera soit l'ensemble $\mathcal{L}$ des ordres totaux, soit l'ensemble $\mathcal{W}$ des *ordres forts*[9], soit l'ensemble $\mathcal{O}$ des *ordres*[10], soit enfin l'ensemble $\mathcal{A}$ des *relations sans circuit*[11] (définies sur A). On a $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}$. Une relation sans circuit peut être considérée comme le modèle minimal de relation de préférence évitant les « incohérences » du type x préféré à y, y préféré à z, et z préféré à x.

Afin de définir quelques fonctions d'agrégation des préférences, nous introduisons des paramètres décrivant un profil $\pi = (L_1,...,L_i,...,L_n)$. Pour $x,y \in A$, nous notons :

$$\boldsymbol{N_\pi(x,y) = \{i \in N : xL_iy\} \qquad n_\pi(x,y) = |N_\pi(x,y)|.}$$

[8] Une relation R sur A est transitive si pour tous $x,y,z \in A$, xRy et yRz impliquent xRz. Elle est antisymétrique (respectivement totale) si, pour tous $x,y \in A$, xRy et yRx impliquent $x = y$ (respectivement si xR^cy implique yRx). Noter qu'une relation totale est *réflexive*, i.e. que pour tout $x \in A$, xRx.

[9] Un ordre fort est un ordre (cf. note suivante) qui vérifie la propriété de *transitivité négative* : pour tous $x,y,z \in A$, xR^cy et yR^cz impliquent xR^cz (en anglais, un ordre fort est souvent appelé "weak order"). Voir aussi la note 18.

[10] Un ordre est une relation transitive, antisymétrique et réflexive.

[11] Nous appelons ici *circuit* d'une relation R sur A une suite $x_1,..,x_k$ d'éléments de A tels que $x_1Rx_2,...x_{k-1}Rx_k,x_kRx_1$ où k, la *longueur* du circuit satisfait $2 \leq k \leq |A|$.

Ainsi $N_\pi(x,y)$ est l'ensemble des votants du profil π préférant x à y et $n_\pi(x,y)$ leur nombre. On remarque que, puisque les préférences des votants sont des ordres totaux, si x et y sont différents, on a $N_\pi(y,x) = N \backslash N_\pi(x,y)$ et donc $n_\pi(x,y) + n_\pi(y,x) = n$.

Le but de l'étude mathématique des fonctions d'agrégation des préférences est d'exhiber de « bonnes » fonctions d'agrégation des préférences. Nous définissons ci-dessous des propriétés utilisées, soit pour évaluer les qualités d'une fonction d'agrégation des préférences donnée, soit pour définir axiomatiquement ce que devrait être une telle bonne fonction.

Soit τ une permutation de $N = \{1,2,...n\}$; $\tau(i)$ est noté τi. Pour $\pi = (L_1,...,L_i,...,L_n) \in \mathcal{L}^N$, on pose $\pi_\tau = (L_{\tau 1},...,L_{\tau i},\ldots,L_{\tau n})$.

DÉFINITION 2.2. *N-SYMÉTRIE* (ou *ANONYMITÉ*)
Pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$ et pour toute permutation τ de N, $f(\pi_\tau) = f(\pi)$.

Si σ est une permutation de A, $\sigma(x)$ est noté σx. Pour R relation binaire sur A, on pose $\sigma R = \{(\sigma x,\sigma y), (x,y) \in R\}$. En particulier, si $L = x_1 x_2 ... x_m$ est un ordre total sur A, on pose $\sigma L = \sigma x_1 \sigma x_2 ... \sigma x_m$. Pour $\pi = (L_1,...,L_i,...,L_n) \in \mathcal{L}^N$, $\sigma(\pi) = (\sigma L_1,...,\sigma L_i,...,\sigma L_n)$.

DÉFINITION 2.3. A-SYMÉTRIE (ou IMPARTIALITÉ)
Pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$ et pour toute permutation σ de A, $\mathrm{f}(\sigma(\pi)) = \sigma \mathrm{f}(\pi)$.

Si une fonction d'agrégation des préférences vérifie ces deux conditions, cela signifie qu'elle n'accorde aucun avantage *a priori* à un candidat ou à un votant, ce qui est souvent, mais non toujours, exigé (ainsi la procédure de vote utilisée par le Conseil des ministres de l'Union européenne donne des poids différents aux pays membres et dans certains cas des droits de veto).

DÉFINITION 2.4. *PARETO* (ou *UNANIMITÉ*)
Pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$ et tous $x,y \in A$ avec $x \neq y$, $[N_\pi(x,y) = N] \Rightarrow [x f(\pi) y$ et $y f(\pi)^c x]$.

Cette propriété ne peut guère être contestée puisqu'elle signifie que si tous les votants sont unanimes à préférer le candidat x à un autre candidat y, x doit être préféré (strictement) à y dans la préférence collective.

Pour $\{x,y\}$ sous-ensemble de A, $R_{/\{x,y\}}$ note la restriction de R à $\{x,y\}$. Pour un profil $\pi = (L_1,...,L_i,...,L_n)$, $\pi_{/\{x,y\}}$ note le profil restreint $(L_{1/\{x,y\}}, ...,L_{n/\{x,y\}})$.

DÉFINITION 2.5. *INDÉPENDANCE*
Pour tous $\pi,\pi' \in \mathcal{L}^N$ et tous $x,y \in A$, $[\pi_{/\{x,y\}} = \pi'_{/\{x,y\}}] \Rightarrow [f(\pi)_{/\{x,y\}} = f(\pi')_{/\{x,y\}}$.

Cette propriété exprime que la préférence collective entre deux candidats doit être déterminée uniquement par les préférences individuelles des votants entre ces deux candidats et ne pas dépendre des préférences avec un troisième. Ceci paraît *a priori* légitime et les fonctions d'agrégation des préférences ne vérifiant pas cette condition peuvent conduire à des situations « paradoxales ». Par exemple le fait de modifier le classement d'un seul candidat peut conduire à inverser l'ordre de préférence collectif[12].

On remarque que, dans cette propriété d'indépendance, la condition $\pi_{/\{x,y\}} = \pi'_{/\{x,y\}}$ pourrait être remplacée par la condition $N_\pi\{x,y\} = N_{\pi'}\{x,y\}$ (toujours en raison du fait que les préférences individuelles sont des ordres totaux).

DÉFINITION 2.6. *NEUTRALITÉ*
Pour tous $\pi,\pi' \in \mathcal{L}^N$ et tous $x,y,z,t \in A$, $[N_\pi\{x,y\} = N_{\pi'}(z,t)] \Rightarrow [xf(\pi)y \Leftrightarrow zf(\pi')t]$.

DÉFINITION 2.7. *MONOTONIE*
Pour tous $\pi,\pi' \in \mathcal{L}^N$ et tous $x,y \in A$, $[N_\pi\{x,y\} \subseteq N_{\pi'}\{x,y\}] \Rightarrow [xf(\pi)y \;\Rightarrow\; xf(\pi')y]$.

On remarque que ces deux dernières propriétés impliquent l'indépendance. En fait la première est équivalente à la conjonction des propriétés d'indépendance et de A-symétrie. La propriété de monotonie signifie que l'accroissement des préférences exprimées envers un candidat sur un autre ne peut que lui profiter, ce qu'il paraît aussi naturel d'exiger.

3. LES FONCTIONS D'AGRÉGATION DES PRÉFÉRENCES DE CONDORCET

DÉFINITIONS 3.1. Un sous-ensemble S de $N = \{1,2,...n\}$ est appelé une *majorité (simple)* si $|S| \geq n/2$ et une *majorité (simple) stricte* si $|S| > n/2$.
Nous posons $\mathfrak{f}_{MAJ}$ = {majorités de N} et $\mathfrak{f}_{SMAJ}$ = {majorités strictes de N}.

DÉFINITIONS 3.2. Pour $\pi \in \mathcal{L}^N$ et $x,y \in A$, nous posons :

$$\boldsymbol{x\, R_{MAJ}(\pi)\, y} \textbf{ si } \boldsymbol{N_\pi(x,y) \in \mathfrak{f}_{MAJ}} \text{ (c'est-à-dire si } n_\pi(x,y) \geq n/2)$$

$$\boldsymbol{x\, R_{SMAJ}(\pi)\, y} \textbf{ si } \boldsymbol{N_\pi(x,y) \in \mathfrak{f}_{SMAJ}} \text{ (c'est-à-dire si } n_\pi(x,y) > n/2).$$

$R_{MAJ}(\pi)$ et $R_{SMAJ}(\pi)$ sont appelées respectivement la *relation majoritaire* et la *relation majoritaire stricte* associées au profil π.

DÉFINITION 3.3. La ***fonction d'agrégation des préférences de Condorcet*** (respectivement la ***fonction stricte d'agrégation des préférences de Condorcet***) est la fonction associant à chaque profil $\pi \in \mathcal{L}^N$ sa relation majoritaire $R_{MAJ}(\pi)$ (respectivement sa relation majoritaire stricte $R_{SMAJ}(\pi)$).

Ces fonctions consistent donc à comparer les candidats par paires, le candidat (ou les candidats) retenu(s) pour chaque paire étant celui (ceux) soutenu(s) par une majorité stricte (ou une majorité) de votants. Elles ont été définies par Condorcet dans son fameux

---

[12] En adaptant un résultat de Fishburn [Fishburn, 1981], on peut exhiber un profil de préférences où une telle inversion se produit lorsque tous les votants qui ne mettent pas en premier un certain candidat dans leur ordre « sincère » de préférences le mettent en dernier dans un ordre « stratégique » (méthode bien connue pour écarter un candidat « dangereux »). La procédure d'agrégation utilisée pour ce profil est la procédure d'agrégation - classique, mais non indépendante - de Borda, consistant à ranger les candidats d'après la somme des rangs qu'ils ont obtenus dans les différents ordres individuels de préférence.

Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix [Condorcet, 1785][13].

Il est facile de vérifier que ces fonctions d'agrégation sont symétriques (vis-à-vis des votants et des candidats), parétiennes, neutres et monotones (et donc indépendantes). Elles jouissent donc d'excellentes propriétés. Malheureusement on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. [McGarvey, 1953] Soit une relation totale (respectivement réflexive et antisymétrique) sur A. Il existe un ensemble N et un profil π de $\mathcal{L}^N$ tels que $R_{\text{MAJ}}(\pi)$ (respectivement $R_{\text{SMAJ}}(\pi)) = R$.

Ce résultat montre le problème posé par l'emploi des fonctions d'agrégation des préférences de Condorcet. La relation majoritaire (respectivement majoritaire stricte) de préférence collective peut être n'importe quelle relation totale (respectivement réflexive et antisymétrique). En particulier elle peut comporter des circuits. Le cas le plus simple[14] se présente avec trois candidats x,y,z et trois votants ayant respectivement comme ordres de préférence xyz, yzx et zxy. La préférence collective majoritaire est alors le circuit $xR_{\text{SMAJ}}(\pi)y$, $yR_{\text{SMAJ}}(\pi)z$ et $zR_{\text{SMAJ}}(\pi)x$. Cette possibilité de circuits a été découverte par Condorcet et a été appelée « l'effet Condorcet » par Guilbaud (et le "voting paradox" dans la littérature de langue anglaise).

4. LES FONCTIONS D'AGRÉGATION ASSOCIÉES À DES JEUX SIMPLES ET LES THÉORÈMES DE GUILBAUD ET NAKAMURA

Les fonctions d'agrégation des préférences de Condorcet sont en fait deux exemples de la vaste classe des fonctions d'agrégation associées à un « jeu simple ». Nous définissons cette classe et cherchons si on peut y trouver des fonctions évitant l'effet Condorcet, c'est-à-dire des fonctions pour lesquelles la préférence collective n'a jamais de circuits. La réponse donnée d'abord par le théorème de Guilbaud [Guilbaud, 1952] dans le cas où l'on exige de plus que la préférence collective soit un ordre total, l'a été de manière générale par le théorème de Nakamura [Nakamura, 1975].

---

[13] Ramon Lull fut au 13e siècle un précurseur de Condorcet pour l'emploi de la méthode des comparaisons par paires [cf. Mc Lean et London, 1990]. On notera que les règles majoritaires de Condorcet demandent une majorité « absolue » (par exemple, $n_\pi(x,y) > n/2$) et non seulement « relative » ($n_\pi(x,y) > n_\pi(y,x)$). Si ces deux règles sont équivalentes lorsque tous les votants s'expriment suivant un ordre total de préférences, il n'en est évidemment pas de même plus généralement, par exemple si des votants s'abstiennent ou expriment une indifférence entre x et y.

[14] Si l'on excepte le cas trivial de deux candidats x et y et de deux votants ayant pour préférences respectives xy et yx.

DÉFINITIONS 4.1. Un *jeu simple*[15] sur N est un ensemble non vide f de sous-ensembles de N vérifiant la condition :

$$\text{pour tous } S, U \subseteq N,\ [S \in \mathsf{f} \text{ et } S \subseteq U] \Rightarrow [U \in \mathsf{f}].$$

Un jeu simple f est *propre* (respectivement *fort*) si pour tout $S \subseteq N$,

$$[S \in \mathsf{f}] \Rightarrow [N \backslash S \notin \mathsf{f}] \text{ (respectivement } [S \notin \mathsf{f}] \Rightarrow [N \backslash S \in \mathsf{f}]).$$

Les parties de N appartenant à un jeu simple f sont aussi appelées les *coalitions ou majorités généralisées* de f. La condition imposée à ces majorités est donc que lorsqu'une majorité gagne des membres, elle reste une majorité. Quant aux deux conditions supplémentaires, elles expriment l'hypothèse que le complémentaire d'une majorité n'est pas une majorité (on peut dire que c'est une *minorité*) ou l'hypothèse inverse que le complémentaire d'une minorité est une majorité.

Nous commençons par des définitions et des résultats sur quelques classes de jeux simples particulièrement importantes pour les problèmes d'agrégation des préférences.

DÉFINITION 4.2.

a) Un jeu simple f est un *préfiltre* (ou est *faible*) si tout $S \in \mathsf{f}$ contient un sous-ensemble non vide V de N. V est appelé le *collège* de f.

b) Un jeu simple f est un *filtre* s'il vérifie les deux conditions suivantes :
- $\emptyset \notin \mathsf{f}$,
- pour tous $S, U \subseteq N$, $[S, U \in \mathsf{f}] \Rightarrow [S \cap U \in \mathsf{f}]$.

c) Un jeu simple f est un *ultrafiltre* si c'est un filtre maximal dans l'ensemble de tous les filtres (i.e. il n'existe pas de filtre f' avec $\mathsf{f} \subset \mathsf{f}'$).

EXEMPLE 4.1. Soit V un sous-ensemble non vide de N. Nous notons f_V le filtre formé de toutes les parties de N contenant V ($\mathsf{f}_V = \{W \subseteq N : V \subseteq W\}$) et nous l'appelons le filtre de base V. En particulier si $V = \{i\}$, $\mathsf{f}_{\{i\}}$ est la famille des sous-ensembles de N contenant le votant i.

LEMME 4.1. Pour un jeu simple f les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est un ultrafiltre,

b) f est un filtre fort,

c) f est un filtre propre et fort.

LEMME 4.2. Si N est fini, un jeu simple f sur N est un filtre (respectivement un ultrafiltre) si et seulement si il existe un sous-ensemble non vide V de N tel que f =

---

[15] Le terme jeu simple pour désigner de telles familles de parties (qu'on retrouve dans de multiples autres domaines) est du à Von Neumann et Morgenstern. Il provient du fait que dans leur ouvrage sur la théorie des jeux [Von Neumann et Morgenstern, 1944] ces structures définissent effectivement une classe de jeux « simples ». L'emploi de ce terme en théorie du choix social n'est pas particulièrement approprié (le terme de famille de « majorités généralisées » utilisé par Guilbaud serait bien préférable), mais il est malheureusement consacré dans la littérature de la théorie du choix social.

f_V (respectivement il existe $i \in N$ tel que $\mathsf{f} = \mathsf{f}_{\{i\}}$)[16].

Autrement dit dans le cas fini, un ultrafiltre est formé de toutes les parties de N contenant un votant i particulier.

Nous allons utiliser une autre caractérisation des ultrafiltres fondée sur l'importante notion de nombre de Nakamura d'un jeu simple. Soit f un jeu simple sur N. On note par $\cap\mathsf{f}$ l'intersection de toutes les coalitions de f : $\cap\mathsf{f} = \cap\{S \subseteq N : S \in \mathsf{f}\}$. Ainsi, d'après la définition 4.2 a), f est faible si $\cap\mathsf{f}$ n'est pas vide.

DÉFINITION 4.3. Le ***nombre de Nakamura*** d'un jeu simple f, noté $\nu(\mathsf{f})$, est le nombre défini par :
- si $\cap\mathsf{f} \neq \varnothing$, $\quad \nu(\mathsf{f}) = +\infty$
- si $\cap\mathsf{f} = \varnothing$, $\quad \nu(\mathsf{f}) = \min\{|\mathsf{f}'|, \varnothing \subset \mathsf{f}' \subseteq \mathsf{f}$ et $\cap\mathsf{f}' = \varnothing\}$.

Donc si f est faible, son nombre de Nakamura est pris égal à $+\infty$, tandis que si l'intersection de toutes les coalitions de f est vide, ce nombre est la cardinalité minimum d'un ensemble de coalitions de f dont l'intersection est vide.

EXEMPLE 4.2. Pour un jeu simple f, $\nu(\mathsf{f}) > 3$ si et seulement si pour tous $S,T,U \in \mathsf{f}$, $S \cap T \cap U \neq \varnothing$. Et pour $N = \{1,2,3\}$ et $\mathsf{f} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, $\nu(\mathsf{f}) = 3$.

LEMME 4.3. Soit f un jeu simple sur N fini :

$$\mathsf{f} \text{ est un ultrafiltre} \Leftrightarrow \mathsf{f} \text{ est fort et } \nu(\mathsf{f}) > 3.$$

Remarque. Ce lemme reste vrai si f est une famille arbitraire de sous-ensembles de N.

Le lemme suivant sera utile à la section 5. La preuve du point a) est évidente. Quant à celle du point b), nous engageons le lecteur à la chercher, sachant qu'elle tient en deux lignes.

LEMME 4.4. Soit f un jeu simple sur N :
a) f est propre si et seulement si $\nu(\mathsf{f}) > 2$
b) Si f n'est pas faible (i.e. si $\cap\mathsf{f} = \varnothing$), $\nu(\mathsf{f}) \leq |N|$.

DÉFINITION 4.4. La ***relation de préférence collective R_{f}*** associée à un jeu simple f et au profil π est donnée par :

$$\text{pour tous } x,y \in A,\ xR_{\mathsf{f}}(\pi)y \Leftrightarrow N_{\pi}(x,y) \in \mathsf{f}.$$

Autrement dit, le profil π des préférences individuelles étant donné, x est préféré collectivement à y si l'ensemble des votants préférant x à y dans ce profil est une coalition du jeu simple f.

Remarque. En théorie des jeux, la partie stricte de la relation R_{f} est souvent appelée la relation de *domination* associée au jeu simple f.

[16] Dans le cas où N n'est pas fini, il existe d'autres ultrafiltres que ceux formés par toutes les parties contenant un élément particulier.

DÉFINITION 4.5. La ***fonction d'agrégation des préférences*** f_{f} associée à un jeu simple f est donnée par :

$$\text{pour tout } \pi \in \mathcal{L}^N, f_{\mathsf{f}}(\pi) = R_{\mathsf{f}}(\pi).$$

Les exemples précédents de jeux simples conduisent à définir plusieurs classes de telles fonctions.

EXEMPLES ET DÉFINITIONS 4.6.

a) Si f est l'ultrafiltre de base $\{i\}$, pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, $f_{\mathsf{f}}(\pi) = L_i$. La fonction f_{f} est donc une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences, associant à tout profil d'ordres totaux l'ordre total du votant i. En fait cette fonction n'est autre que la ième-projection $(L_1,...,L_n) \to L_i$. En théorie du choix social, on dit aussi dans ce cas que f_{f} est une *fonction dictatoriale absolue* et que le votant i est un ***dictateur absolu***[17].

b) Si f est le filtre de base V, pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, $f_{\mathsf{f}}(\pi) = \cap\{L_i : i \in V\}$. La préférence collective est donc uniquement déterminée par les votants de V et est constituée des préférences unanimes de ces votants. Nous disons alors que f_{f} est la *V-projection* et que V est une ***oligarchie absolue***. Si de plus $V = N$, on dit que f_{f} est la *fonction unanimité.*

c) Si f est un préfiltre de collège V, $xR_{\mathsf{f}}(\pi)y$ implique $V \subseteq N_\pi(x,y)$. On a donc $R_{\mathsf{f}}(\pi) \subseteq \cap\{L_i : i \quad V\}$. Donc si $i \in V$, pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, xL_iy implique $(y,x) \notin R_{\mathsf{f}}(\pi)$. Puisque dans ce cas le votant i peut empêcher que y soit préféré collectivement à x, on dit qu'il a un ***droit de veto***. Tout votant du collège a donc un droit de veto.

d) Soit q un entier $\leq n$. Nous posons $\mathsf{f}_q = \{S \subseteq N : |S| \geq q\}$, ce qui revient à dire que les coalitions de f_q sont formées de tous les ensembles de votants en nombre supérieur ou égal au « quota » q. En particulier, si $q = n/2$, $\mathsf{f}_{n/2}$ est la famille des majorités (simples) et l'on retrouve la fonction d'agrégation de Condorcet, tandis que si $q = n$, on retrouve la fonction unanimité.

Il est facile de vérifier que les fonctions d'agrégation des préférences f_{f} associées à un jeu simple f sont A-symétriques, parétiennes, neutres et monotones (donc aussi indépendantes). Elles sont de plus N-symétriques si et seulement si il existe $q \in \{1,...n\}$ tel que $\mathsf{f} = \mathsf{f}_q$.

Remarque. Si un jeu simple f contient l'ensemble vide, il est formé de toutes les parties de N et f_{f} est la fonction constante associant la relation universelle A^2 à tout profil.

Les notions de jeu simple propre ou fort ayant été données à la Définition 4.1, on en déduit immédiatement le résultat suivant :

PROPOSITION 4.1. L'image $f_{\mathsf{f}}(\pi)$ de tout profil $\pi \in \mathcal{L}^N$ est une relation antisymétrique (respectivement totale) si et seulement si f est un jeu simple propre (respectivement fort).

[17] Le terme « absolu » est utilisé dès que la préférence collective est exactement celle du dictateur. Dans le théorème d'Arrow (Section 6) où les préférences des votants sont des préordres totaux, le dictateur n'est pas absolu dans la mesure où la relation de préférence collective conserve sa relation de préférence stricte mais non nécessairement sa relation d'indifférence.

On peut maintenant énoncer le théorème de Guilbaud.

THÉORÈME 4.1. [Guilbaud, 1952] Soient A et N deux ensembles finis de cardinalité supérieure à 2, f un jeu simple sur N et f_{f} la fonction d'agrégation des préférences associée : **f_{f} est une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences si et seulement si f_{f} est dictatoriale absolue.**

Autrement dit, f_{f} associe à tout profil π de $\mathcal{L}^N$ un ordre total si et seulement si cet ordre est toujours l'ordre de préférence d'un même votant. D'autre part, dire que f_{f} est dictatoriale absolue équivaut à dire que f est un ultrafiltre (cf. le point a) des Définitions 4.6) et, d'après le Lemme 4.3, à dire que f est fort et $\nu(\mathsf{f}) > 3$. Le Théorème de Nakamura généralise ce dernier résultat. Avant de l'énoncer, nous rappelons un résultat classique sur les relations binaires qui sera utilisé dans la preuve du théorème.

Lemme 4.5. Soit R une relation binaire sur A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) R n'a pas de circuit,

b) R est contenue dans un ordre total.

THÉORÈME 4.2. [Nakamura, 1975)] Soient A un ensemble fini de cardinalité supérieure à 1 et N un ensemble de cardinalité supérieure à 2, f un jeu simple sur N et f_{f} la fonction d'agrégation des préférences associée :

f_{f} est une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences $\Leftrightarrow \nu(\mathsf{f}) > |A|$.

Autrement dit, f_{f} associe à tout profil π de $\mathcal{L}^N$ une relation sans circuit si et seulement si le nombre de Nakamura de f (i.e. le nombre minimum de coalitions de f dont l'intersection est vide) est strictement plus grand que la cardinalité de A.

Remarque. Soit f_{f} la fonction associée à un jeu simple f. Notons $C_{\mathsf{f}}(\pi)$ l'ensemble des éléments maximaux de la relation $R_{\mathsf{f}}(\pi)$. En théorie des jeux, cet ensemble est appelé son *cœur* et on dit que la fonction $\pi \to C_{\mathsf{f}}(\pi)$ est *stable (pour le cœur)* si pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, $C_{\mathsf{f}}(\pi)$ est non vide. Une légère modification de la preuve du théorème de Nakamura montre qu'on a aussi la version suivante de ce théorème : la fonction $\pi \to C_{\mathsf{f}}(\pi)$ est stable si et seulement si $\nu(\mathsf{f}) > |A|$.

COROLLAIRE 4.1. Soient f un jeu simple et f_{f} la fonction d'agrégation des préférences associée.

1) Si $|A| = 2$,

a) $f_{\mathfrak{f}}$ est une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences si et seulement si $\mathfrak{f}$ est un jeu simple propre.

b) $f_{\mathfrak{f}}$ est une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences si et seulement si $\mathfrak{f}$ est un jeu simple propre et fort.

2) Si $|A| \geq 3$,

a) si $f_{\mathfrak{f}}$ est une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences, ou, si $\mathfrak{f}$ est fort et $f_{\mathfrak{f}}$ une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences, $\mathfrak{f}$ est un ultrafiltre.

b) si N est fini, $f_{\mathfrak{f}}$ est une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences si et seulement si $\mathfrak{f}$ est un ultrafiltre et si et seulement si $f_{\mathfrak{f}}$ est dictatoriale absolue.

Remarque. Le point b) de la partie 2) de ce corollaire est exactement le théorème de Guilbaud.

5. FONCTIONS INDÉPENDANTES D'AGRÉGATION DES PRÉFÉRENCES ET THÉORÈMES ARROWIENS

Les fonctions d'agrégation des préférences associées à un jeu simple étudiées à la section précédente font partie de la classe des fonctions d'agrégation des préférences indépendantes et parétiennes. Nous adoptons maintenant une approche axiomatique et nous cherchons les « bonnes » fonctions d'agrégation des préférences $\mathcal{L}^N \to \mathcal{M}$ Nous disons qu'une telle fonction est « bonne » si elle satisfait au moins les propriétés d'indépendance et de Pareto et si la préférence collective est toujours sans circuits, i.e. si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ Nous obtenons une série de théorèmes arrowiens concernant successivement les cas où la préférence collective est (toujours) soit un ordre total, soit un ordre, soit un ordre fort ou soit enfin une relation sans circuit. Dans cette section, nous supposons les nombres de candidats et de votants au moins égaux à 3.

THÉORÈME 5.1. Soit f une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences. Si f est indépendante et parétienne, il existe un ultrafiltre $\mathfrak{f}$ sur N tel que $f = f_{\mathfrak{f}}$.

La preuve de ce résultat utilise le lemme élémentaire suivant sur les relations binaires et l'importante notion d'ensemble décisif.

LEMME 5.1. Soit R une relation binaire sur A telle qu'on ait aRb pour au moins un couple (a,b) avec $a \neq b$, et telle que pour tout triplet (x,y,z) d'éléments distincts de A, xRy implique xRz et zRy. Alors xRy pour tout couple (x,y) avec $x \neq y$.

DÉFINITION 5.1. Soient f une $\mathcal{M}$-fonction d'agrégation des préférences et (x,y) un couple d'éléments de A avec $x \neq y$. Un sous-ensemble S de N est un *(x,y) ensemble décisif* (pour la fonction f) si, pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$ tel que $N_\pi(x,y) = S$, on a $(x,y) \in f(\pi)$ et $(y,x) \notin f(\pi)$. Nous notons $\mathfrak{f}(x,y)$ la famille des (x,y) ensembles décisifs (pour f).

Un sous-ensemble S de N est un ***ensemble décisif*** (pour la fonction f) si S est (x,y) décisif pour tout couple (x,y) avec $x \neq y$.

Nous notons f la famille des ensembles décisifs (pour f).

On notera les points suivants :

- si $\mathcal{M}$ est un ensemble de relations antisymétriques, S est (un ensemble) décisif si pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$ avec $N_\pi(x,y) = S$, on a $(x,y) \in f(\pi)$,
- la fonction f est parétienne si et seulement si N est un ensemble décisif,
- si f est indépendante, il suffit qu'il existe un profil π avec $N_\pi(x,y) = S$, $(x,y) \in f(\pi)$ et $(y,x) \notin f(\pi)$ pour que S soit (x,y) décisif.

On a donc en particulier le résultat suivant :

LEMME 5.2. Soit $\mathsf{f}(x,y)$ la famille des (x,y) ensembles décisifs d'une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences indépendante et parétienne. $\mathsf{f}(x,y)$ est non vide, et un sous-ensemble S de N appartient à $\mathsf{f}(x,y)$ si et seulement si il existe $\pi \in \mathcal{L}^N$ tel que $N_\pi(x,y) = S$ et $(x,y) \in f_{\mathsf{f}}(\pi)$.

On notera que ce lemme permet d'écrire :

(1) $$\boldsymbol{(x,y) \in f(\pi) \Leftrightarrow N_\pi(x,y) \in \mathsf{f}(x,y).}$$

Autrement dit, x est préféré collectivement à y si et seulement si l'ensemble des votants préférant x à y est un (x,y) ensemble décisif.

Comme conséquence immédiate du Théorème 5.1, du Lemme 4.2 et de la Définition 4.6 a), on obtient les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 5.1. Soit f une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences avec N fini. f est indépendante et parétienne si et seulement si f est une projection.

COROLLAIRE 5.2. Si N est fini, il n'existe pas de $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences indépendante, parétienne et non dictatoriale.

Pour essayer d'échapper à ce résultat d'impossibilité, nous élargissons le domaine des préférences collectives possibles en considérant maintenant que cette préférence peut être un ordre quelconque, i.e. en supposant $\mathcal{M} = \mathcal{O}$.

THÉORÈME 5.2. Soit f une $\mathcal{O}$-fonction d'agrégation des préférences. Si f est indépendante et parétienne, il existe un filtre f sur N tel que $f = f_{\mathsf{f}}$.

COROLLAIRE 5.3. Soit f une $\mathcal{O}$-fonction d'agrégation des préférences avec N fini.

- f est indépendante et parétienne si et seulement si f est une V-projection (i.e. est oligarchique absolue).
- f est indépendante, parétienne et V-symétrique si et seulement si f est la fonction unanimité.

La première assertion est une conséquence immédiate du Théorème 5.2, du Lemme 4.2 et de la Définition 4.6 b). La seconde assertion est une conséquence immédiate du Théorème 5.2, de la Définition 4.6 b) et de la Proposition 4.1 (puisque $\mathcal{F} = \{S \subseteq N : |S| \geq k\}$ est un filtre si et seulement si $\mathcal{F} = \{N\}$).

Comme la preuve du Théorème 5.2 reste valable pour tout ensemble d'ordres $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}$, on en déduit que dans ce cas et pour N fini, une $\mathcal{M}$-fonction d'agrégation des préférences peut être soit une projection ou une V-projection (avec $|V| > 1$). Le cas où l'on obtient une projection ne se limite pas à celui où $\mathcal{M} = \mathcal{L}$, comme vont le montrer les résultats suivants. $\mathcal{M}$ est dit *$\cap$-stable* si pour tout $O, O' \in \mathcal{M}$, $O \cap O' \in \mathcal{M}$. Le résultat suivant montre que la non $\cap$-stabilité de $\mathcal{M}$ est une condition suffisante pour obtenir le résultat dictatorial.

THÉORÈME 5.3. Soient N fini et f une $\mathcal{M}$-fonction d'agrégation des préférences avec $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}$ et $\mathcal{M}$ non $\cap$-stable. f est indépendante et parétienne si et seulement si f est une projection.

Considérons en particulier le cas où $\mathcal{M}$ est l'ensemble $\mathcal{W}$ de tous les ordres forts (cf. note 9) sur A. $\mathcal{W}$ n'est pas $\cap$-stable. Par exemple, si $A = \{x,y,z\}$, l'intersection des deux ordres forts dont les couples d'éléments différents sont respectivement $\{(x,y), (x,z)\}$ et $\{(x,y), (z,y)\}$ n'est pas un ordre fort. On obtient donc :

COROLLAIRE 5.4. Soit f une $\mathcal{W}$-fonction d'agrégation des préférences avec N fini. Si f est indépendante et parétienne, f est une projection.

Remarque. Ce corollaire montre en particulier que le codomaine d'une $\mathcal{W}$-fonction d'agrégation des préférences indépendante et parétienne est l'ensemble $\mathcal{L}$ des ordres totaux (ce qui aurait pu être prouvé directement).

Nous accroissons encore le codomaine de nos fonctions d'agrégation des préférences en considérant maintenant l'hypothèse minimale de rationalité de la préférence collective, à savoir qu'elle est sans circuits : le codomaine de f est l'ensemble $\mathcal{A}$ des relations binaires sans circuits. Dans ce cas, une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences indépendante et parétienne n'est plus nécessairement neutre ou monotone. Nous considérons le cas particulier où ces deux propriétés sont imposées (des cas plus généraux sont évoqués à la Section 7).

THÉORÈME 5.4. Soient N fini et f une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences. f est neutre, monotone et parétienne si et seulement si $f = f_{\mathcal{F}}$ avec $\mathcal{F}$ jeu simple propre et $\nu(\mathcal{F}) > |A|$.

COROLLAIRE 5.5. Soit f une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences neutre, monotone et parétienne avec $|A| \geq |N|$. Il existe un votant de N ayant droit de veto.

Ainsi lorsque le nombre de candidats est supérieur ou égal au nombre de votants, si une fonction d'agrégation des préférences est « bonne » (au sens d'être neutre, monotone, parétienne et de ne jamais conduire à un effet Condorcet), il existe au moins un votant ayant un droit de veto. Dans le cas contraire où $|A| < |N|$, tout jeu simple $\mathcal{F}$ avec $|A| < \nu(\mathcal{F}) \leq |N| = n$ induit une telle bonne fonction d'agrégation des préférences $f_{\mathcal{F}}$ sans votant ayant droit de veto. Mais ce résultat n'est pas aussi positif qu'il le semblerait. Si, par exemple, on veut aussi que la fonction d'agrégation des préférences soit anonyme, il faut prendre $\mathcal{F} = \{S \subseteq N : |S| \geq q\}$. Or on vérifie aisément que dans ce cas $\nu(\mathcal{F})$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $n/(n-q)$. Il en résulte que $f_{\mathcal{F}}$ est une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences anonyme, neutre, monotone et parétienne si et seulement si $q > n(m-1)/m$. Ainsi avec cinq candidats et dix votants, il faut au moins neuf votants d'accord entre eux pour qu'un candidat soit préféré collectivement à un autre. De manière générale, la valeur du quota q d'une fonction d'agrégation $f_{\mathcal{F}}$ neutre, monotone, parétienne et anonyme étant élevée, la collectivité utilisant une telle fonction ne pourra que rarement départager les candidats.

6. LE THÉORÈME D'ARROW

Les résultats précédents permettent de prouver le Théorème « classique » (cf. note 4) d'Arrow. On suppose maintenant que les préférences individuelles et collectives sont des *préordres totaux*[18]. L'ensemble des préordres totaux sur A est noté $\mathcal{P}$. La fonction d'agrégation des préférences est donc une fonction $f : \mathcal{P}^N \to \mathcal{P}$. Nous notons respectivement R_i, P_i et I_i les relations de préférence large, de préférence stricte et d'indifférence du votant i (cf. note 18). De même la relation de préférence collective, c'est-à-dire le préordre total $f(\pi)$, est notée $R = P + I$ (et $R' = P' + I'$ pour $f(\pi')$). Pour un profil $\pi \in \mathcal{P}^N$, nous posons $N_\pi(x,y) = \{i \in N : xP_iy\}$.

L'axiome d'indépendance reste le même (mais on notera que $\pi_{/\{x,y\}} = \pi'_{/\{x,y\}}$ est maintenant équivalent à $N_\pi(x,y) = N_{\pi'}(x,y)$ **et** $N_\pi(y,x) = N_{\pi'}(y,x)$).

L'axiome de Pareto devient maintenant l'axiome dit axiome *faible* de Pareto et, de même que la notion de dictateur, il est défini par rapport aux préférences strictes :

- Pour tout $\pi \in \mathcal{P}^N$ et tous $x,y \in A$ avec $x \neq y$, $[xP_iy$ pour tout $i \in N] \Rightarrow [xPy]$.
- Un votant $k \in N$ est un *dictateur* (pour la fonction f) si pour tout $\pi \in \mathcal{P}^N$, xP_ky implique xPy.

Une fonction $f : \mathcal{P}^N \to \mathcal{P}$ est *dictatoriale* s'il existe un dictateur (nécessairement unique).

THÉORÈME 6.1. (Théorème d'Arrow). Soient $|A| \geq 3$, N fini avec $|N| \geq 3$, et f une fonction $\mathcal{P}^N \to \mathcal{P}$. Si f est indépendante et parétienne, f est dictatoriale.

La preuve que nous donnons de ce Théorème à la Section 8 montre qu'on peut obtenir le Théorème d'Arrow à partir du théorème correspondant pour les ordres totaux (Corollaire 5.1). Il y a bien sûr beaucoup de preuves directes. Nous en donnons deux en

---

[18]Un préordre total est une relation transitive et totale. R étant totale, rappelons qu'on peut l'écrire sous la forme $R = P+I$ où P (xPy si xRy et yR^cx) est la préférence stricte et I (xIy si xRy et yRx) la relation d'indifférence. Il est facile de vérifier que $P \cup \{(x,x), x \in A\}$ est alors un ordre fort et I une relation d'équivalence.

annexe : la preuve d'Arrow [Arrow, 1952] ; la preuve de Geanakoplos [Geanakoplos, 1996] qui utilise la notion - due à Barbera [Barbera, 1980] - de *votant pivot*.

7. COMMENTAIRES ET GUIDE BIBLIOGRAPHIQUE

Les recherches pour surpasser la difficulté soulevée par le Théorème d'Arrow ont été très nombreuses et ont emprunté différentes directions. Avant d'en présenter quelques-unes, il est intéressant de revenir sur les différences entre ce Théorème et le Corollaire 5.1, qu'on peut appeler le Théorème d'Arrow pour les ordres totaux. Ce dernier résultat *caractérise* les fonctions d'agrégation des préférences dont le domaine et le codomaine sont respectivement tous les profils d'ordres totaux et tous les ordres totaux : ces fonctions sont indépendantes et parétiennes si et seulement si elles sont dictatoriales absolues, i.e. si et seulement si il existe un ultrafiltre $\mathsf{f}_{\{k\}}$ tel que $f = f_{\mathsf{f}_{\{k\}}}$. Le Théorème d'Arrow porte lui sur des fonctions d'agrégation des préférences (appelées *social welfare functions* par Arrow) dont le domaine et le codomaine sont respectivement tous les profils de préordres totaux et tous les préordres totaux. Il ne caractérise pas les fonctions de cette nature qui sont indépendantes et parétiennes. Il dit seulement qu'il existe un dictateur, c'est-à-dire un votant k qui impose sa préférence *stricte* ($P_k \subseteq P$ pour tout π). Ceci est équivalent à dire qu'il existe une fonction dictatoriale *absolue* $f_{\mathsf{f}_{\{k\}}}$, telle que $f(\pi) \subseteq f_{\mathsf{f}_{\{k\}}}(\pi) = R_k$ pour tout π, i.e. telle que $f \leq f_{\mathsf{f}_{\{k\}}}$.

On remarque que ce résultat ne dit pas quelle va être la préférence collective entre deux candidats si le dictateur est indifférent entre eux. Bien que la différence de signification entre les résultats des deux théorèmes soit faible, le cas des préordres totaux est beaucoup plus complexe du point de vue mathématique. Par exemple les fonctions dictatoriales dans ce second cas ne sont pas nécessairement neutres au sens de la Définition 2.2. Elles sont seulement « quasi-neutres » au sens où la famille des ensembles décisifs[19] est la même pour tout couple (x,y) d'éléments distincts (de façon équivalente, elles sont neutres lorsque aucun votant n'est indifférent entre les candidats considérés). En fait, il n'existe pas à notre connaissance de caractérisation des fonctions dictatoriales d'Arrow.

Plus généralement, quand le domaine de la fonction d'agrégation des préférences est l'ensemble des profils de préordres totaux, les résultats caractérisant les propriétés structurelles des familles d'ensembles décisifs sont insuffisants pour caractériser ces fonctions : deux telles fonctions peuvent avoir les mêmes familles d'ensembles décisifs

[19]Dans le cas d'une fonction f de $\mathcal{P}^N$ dans $\mathcal{P}$ on peut définir plusieurs notions d'ensembles décisifs. Suivant Arrow (et en conformité avec notre définition de la Section 5) nous appelons ici *ensemble décisif* un sous-ensemble S de N tel que pour tout (x,y) avec $x \neq y$ et pour tout $\pi \in \mathcal{P}^N$ tel que $N_\pi(x,y) = S$ et $N_\pi(y,x) = N \backslash S$ on a xPy (P partie stricte de $f(\pi)$). On notera que dans la première preuve du Théorème d'Arrow donnée en annexe, il est en fait montré que - sous les hypothèses du théorème - les ensembles décisifs sont fortement décisifs au sens suivant: S est *fortement décisif* si pour tout (x,y) avec $x \neq y$ et pour tout $\pi \in \mathcal{P}^N$ avec $N_\pi(x,y) \supseteq S$, on a xPy.

mais une distribution très différente du « pouvoir » entre les votants[20]. Il n'en reste pas moins que la notion d'ensemble décisif (due à Arrow) et ses généralisations (voir ci-dessous) ainsi que l'élucidation de la structure des familles d'ensemble décisifs restent importantes. Cette structure n'avait pas été précisée dans les premières preuves données par Arrow. Mais dès 1952, Guilbaud explicita le lien avec les jeux simples de Von Neumann et Morgenstern [Von Neumann et Morgenstern, 1944], un lien utilisé ensuite par de nombreux auteurs. Dans son texte, Guilbaud supposait que les préférences individuelles étaient des ordres totaux et que la fonction d'agrégation des préférences était celle associée à un jeu simple propre et fort f. Il aboutissait alors au résultat dictatorial en montrant que, pour éviter l'effet Condorcet, trois coalitions ne devaient jamais avoir d'intersection vide (cf. preuve du Théorème 4.1 dans la Section 8). Il fut par ailleurs remarqué dès la fin des années soixante [Monjardet, 1969] que la preuve de Guilbaud revient à montrer que le jeu simple f est un ultrafiltre, une remarque faite et développée indépendamment par Hansonn [Hansonn, 1972] et Kirman et Sondermann [Kirman et Sondermann, 1972] dans le cas du Théorème d'Arrow pour les préordres totaux.

Le fait qu'on puisse dériver le Théorème d'Arrow pour les préordres totaux de celui pour les ordres totaux semble avoir été remarqué et utilisé pour la première fois par Wilson [Wilson, 1975]. Mais sa preuve pour le cas des ordres totaux, fondée sur sa théorie des « frames », est formidablement compliquée. Des preuves beaucoup plus simples du Théorème d'Arrow pour les ordres totaux et/ou du passage du cas ordres totaux au cas préordres totaux ont été données par différents auteurs [Blau, 1979], [Kim et Roush, 1980], [Monjardet, 1978].

Nous considérons maintenant diverses tentatives pour relâcher les conditions d'Arrow afin d'éviter un résultat d'impossibilité (mais évidemment en gardant la condition d'obtenir une fonction non dictatoriale). Nous commençons par la condition de Pareto qui, bien que semblant la plus incontestable, a parfois été discutée (par exemple par Sen [Sen, 1970] qui montre son incompatibilité avec des conditions de « liberté » individuelle). Mais en fait on a montré très tôt [Murakami, 1968], [Hansonn, 1972], [Wilson, 1972] qu'une fonction $\mathcal{P}^N \rightarrow \mathcal{P}$ satisfaisant uniquement la condition d'indépendance est un « mélange » de fonctions « localement » dictatoriales, antidictatoriales[21], imposées[22] et nulles[23]. Et plus récemment, Campbell et Kelly [Campbell et Kelly, 1993] ont montré que pour une telle fonction, plus on veut éviter des

[20] Considérons la fonction d'agrégation unanimité pour laquelle xPy si et seulement si xP_iy pour tout votant i de N. Elle n'admet qu'un ensemble décisif, à savoir l'ensemble N. Modifions cette fonction en ne gardant la règle d'unanimité que pour un couple et en prenant un votant comme dictateur pour tous les autres couples (la préférence collective P n'est plus alors nécessairement un ordre, mais elle reste sans circuit). La famille des ensembles décisifs reste limitée à l'ensemble N alors que le pouvoir d'imposer une préférence collective est considérablement modifié (cet exemple est emprunté à [Blair et Pollak, 1982]).

[21] Un votant est un *antidictateur* (on dit aussi un *persécuté*) si la préférence collective stricte est l'inverse de sa propre préférence stricte.

[22] Une fonction est *imposée* sur $\{x,y\}$ si la préférence collective ne dépend pas des préférences exprimées par les votants sur les candidats (elle est toujours soit xPy, soit yPx, soit xIy).

[23] Une fonction est *nulle* si la préférence collective est toujours la relation d'indifférence.

dictatures ou des antidictatures locales, plus on doit sacrifier la condition d'unanimité. Dans une direction inverse, renforcer la condition d'unanimité conduit parfois à des fonctions qui peuvent être caractérisées, par exemple comme une *hiérarchie de dictateurs*[24] [Fishburn, 1974].

Une autre approche utilisée dans la Section 5 pour éviter le résultat dictatorial est d'élargir le codomaine de la fonction d'agrégation. Nous avons montré que, dans le cas d'une fonction d'agrégation indépendante et parétienne où la préférence collective peut être un ordre quelconque, on aboutit à des résultats oligarchiques. Le cas où l'on suppose seulement que cette préférence collective est sans circuits est beaucoup plus complexe, car alors les conditions d'indépendance et de Pareto n'impliquent plus nécessairement la neutralité, la quasi-neutralité ou la monotonie de la fonction d'agrégation. La notion de « constitution binaire » due à Ferejohn et Fishburn [Ferejohn et Fishburn, 1979] fournit le cadre approprié pour traiter des fonctions d'agrégation indépendantes qui conduisent à une relation de préférence collective au départ arbitraire. Cette notion qui permet de généraliser la notion d'ensemble décisif (par exemple en considérant des majorités « relatives » et non plus seulement « absolues », cf. note 13) est présentée dans l'article d'Andjiga et Moulen dans ce numéro. On trouvera des résultats complémentaires dans, particulièrement [Andjiga et Moulen, 1988], [Lebreton et Truchon, 1995], [Truchon, 1996] et le livre d'Aleskerov [Aleskerov, 1999], où, suivant la terminologie de « l'école russe » de choix social, les fonctions d'agrégation indépendantes sont appelées « locales ».

Au lieu d'élargir le codomaine de la fonction d'agrégation, on peut réduire son domaine. Pour que le résultat dictatorial d'Arrow subsiste lorsque les préférences des votants sont restreintes à un sous-domaine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}^N$, il faut que les votants aient une liberté d'expression suffisante de leurs préférences. La condition suffisante classique imposée à $\mathcal{D}$, appelée condition de *triplet libre*, consiste à demander qu'on puisse y trouver tous les états possibles de préférence entre trois candidats quelconques. Elle s'énonce formellement : pour tout ensemble $\{x,y,z\}$ de trois candidats et pour tout profil π' de $(\mathcal{P}_{\{x,y,z\}})^N$, où $\mathcal{P}_{\{x,y,z\}}$ est l'ensemble des préordres totaux sur $\{x,y,z\}$, il doit exister un profil π dans le sous-domaine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}^N$ considéré tel que la restriction à $\{x,y,z\}$ de π soit ce profil π'. En sens inverse, les résultats de Black [Black, 1958] montrent que le Théorème d'Arrow n'est plus vrai pour un sous-domaine $\mathcal{U}^N$ de $\mathcal{P}^N$, où $\mathcal{U}$ est formé d'un ensemble d'ordres totaux satisfaisant la condition dite de *L-unimodalité* ("single-peakedness")[25]. Dans un tel cas la règle majoritaire fournit toujours un ordre total et satisfait donc tous les axiomes d'Arrow. De nombreux travaux ont présenté des conditions sur un ensemble $\mathcal{E}$ de préordres totaux qui assurent que la préférence collective obtenue en appliquant la règle majoritaire (ou d'autres règles) aux profils de

[24] Dans ce cas, il existe un ordre total sur les votants et si les p premiers votants dans cet ordre sont indifférents entre deux candidats, c'est la préférence du $(p+1)$ème votant qui l'emporte.

[25] Cette condition exige que pout tout triplet d'élements, l'élément rangé entre les deux autres dans un ordre total de référence L fixé ne soit jamais rangé dernier des trois éléments dans un ordre de préférence individuel. Elle peut être réalisée dès lors qu'il existe un ordre total « objectif » sur les options, par exemple lorsque ces options s'expriment en unités monétaires.

$\mathscr{E}^N$ est transitive ou sans circuits (voir des exposés de synthèse dans [Barbut et Frey, 1971], [Fishburn, 1973], [Gaertner, 1979], [Gaertner et Salles, 1981], [Arrow et Raynaud, 1986]. Mais ces conditions assez techniques n'ont généralement pas l'interprétation simple admise par la condition de *L*-unimodalité. D'autre part toutes ces conditions restreignent sensiblement la liberté des votants de choisir leurs préférences (voir [Fishburn, 1997], pour des recherches récentes sur la taille de cette restriction).

Certains travaux ont considéré des changements plus radicaux dans les préférences des votants. L'hypothèse que les préférences des votants s'expriment par des préordres (ou ordres) totaux peut en effet être contestée. Cette hypothèse implique en effet que la relation d'indifférence d'un individu est transitive. Or on sait depuis longtemps que, notamment à cause des phénomènes de seuil de discrimination, cette relation d'indifférence n'est pas nécessairement transitive. Depuis les années cinquante des modèles de préférence - comme les *quasi-ordres* (les "*semiorders*" de Luce) - ont été proposés pour tenir compte de ce phénomène. D'autre part la préférence stricte, elle même, peut ne pas être transitive, par exemple lorsqu'elle résulte de préférences combinant plusieurs critères. En fait, si l'on impose très peu de contraintes aux préférences individuelles ou collectives, les résultats d'impossibilité disparaissent, puisque la règle majoritaire fonctionne parfaitement dans ce cas. Au contraire, l'hypothèse de transitivité des préférences individuelles ou collectives, par exemple le fait qu'il s'agisse d'ordres arbitraires, fait réapparaître les problèmes (cf. par exemple [Monjardet, 1978]). Dans cette direction, il est intéressant de remarquer que le cas des préordres totaux apparaît comme une exception, dans la mesure où, pour beaucoup de classes d'ordres, imposer les axiomes d'Arrow conduit à un renforcement du Théorème d'Arrow : la fonction d'agrégation est une projection (ou une *V*-projection), c'est-à-dire implique un dictateur ou une oligarchie absolus et non seulement un dictateur ou une oligarchie (cf. [Barthélemy, 1982]).

Pour terminer, on peut mentionner qu'il existe beaucoup d'autres développements du résultat d'Arrow non évoqués ci-dessus. Un des plus intéressants concerne les liens avec les aspects « stratégiques » du vote. Il a d'abord conduit au théorème de Gibbard [Gibbard, 1973] et Satterthwaite [Satterthwaite, 1975] montrant que les seules fonctions de choix social non « manipulables »[26] sont dictatoriales. Ce résultat est mathématiquement équivalent au Théorème d'Arrow, la donnée d'un des deux théorèmes permettant de montrer l'autre. Il peut être aussi montré en utilisant le fait qu'un certain jeu simple doit être un ultrafiltre [Batteau, Blin et Monjardet, 1981]. D'autres développements ont porté sur les fonctions probabilistes ou valuées (« floues ») d'agrégation des préférences, l'agrégation des préférences ou de fonctions de choix individuelles en des fonctions de choix, les résultats d'impossibilité - ou de possibilité - pour des préférences représentées par des utilités cardinales ou/et dans des environnements économiques, etc. Sur de telles questions on pourra notamment se

[26] Une fonction de choix social est une application de l'ensemble des profils de préférences dans l'ensemble des candidats. Elle est *manipulable* si, pour au moins un profil de préférences $(L_1,\ldots,L_i,\ldots L_n)$, il existe au moins un votant i qui en utilisant pour son vote un autre ordre que son ordre « sincère » de préférences L_i obtiendra un résultat meilleur pour lui.

reporter à [Abdou et Keiding, 1991], [Aizerman et Aleskerov, 1995], [Campbell, 1992], [Kelly, 1978], [Le Breton et Weymark, 2002], [Moulin, 1988], et au numéro spécial de *Social Choice and Welfare* de 1997 (14,2) intitulé *Topological social choice*.

8. PREUVES

Preuve de la Proposition 3.1

Soit R une relation totale sur A contenant r couples (x,y) avec $x \neq y$. Nous associons à chaque couple (x,y) de R deux ordres totaux $L(x,y) = xyx_1x_2...x_{m-3}x_{m-2}$ et $L'(x,y) = x_{m-2}x_{m-3}....x_2x_1xy$ (autrement dit, dans les deux ordres x est préféré à y, mais alors qu'ils sont classés en tête dans le premier ordre, ils sont classés en queue dans le second et les autres candidats sont classés en sens inverse dans les deux ordres). Si π est le profil formé par ces $2r$ ordres totaux, $n_\pi(x,y) = r+1$ si $(x,y) \in R$ et $(y,x) \notin R$, $n_\pi(x,y) = r$ si $(x,y) \in R$ et $(y,x) \in R$ et $n_\pi(x,y) = r-1$ si $(x,y) \notin R$. D'où $R_{\mathrm{MAJ}}(\pi) = R$. La preuve pour une relation réflexive et antisymétrique est similaire. ❑

Preuve du Lemme 4.1

a) $\Rightarrow$ b) Soit f un ultrafiltre sur N et supposons qu'il existe $T \subseteq N$ tel que T et $N \backslash T$ n'appartiennent pas à f. Posons $\mathsf{g} = \{S \cap U, S \in \mathsf{f}, U \supseteq T\}$. D'abord $\emptyset \notin \mathsf{g}$ (sinon il existe $S \in \mathsf{f}$ tel que $T \subseteq U$ et $S \cap U = \emptyset$, ce qui implique $S \subseteq N \backslash T$ et $N \backslash T \in \mathsf{f}$). Soient $S \cap U \in \mathsf{g}$ et $S \cap U \subset V$. Alors $V = (S \cap U) \cup W = (S \cup W) \cap (U \cup W) \in \mathsf{g}$. D'autre part g est évidemment $\cap$-stable et contient $T = N \cap T$. Donc g est un filtre contenant f, ce qui est impossible.

b) $\Rightarrow$ c) En effet tout filtre est propre (puisqu'il ne peut contenir deux ensembles ayant une intersection vide).

c) $\Rightarrow$ a) Soit f un filtre propre et fort et supposons qu'il existe un filtre $\mathsf{g} \supset \mathsf{f}$. Donc il existe $S \subseteq N$ tel que $S \in \mathsf{g}$ et $S \notin \mathsf{f}$. Le fait que f soit fort implique $N \backslash S \in \mathsf{f}$. Donc S et $N \backslash S \in \mathsf{g}$, ce qui est impossible. ❑

Preuve du Lemme 4.2

Si N est fini, l'intersection de tous les membres du filtre f est un sous-ensemble non vide V, et $\mathsf{f} = \mathsf{f}_V$. Si de plus f est un ultrafiltre, f_V est fort (par le Lemme 4.1), ce qui implique $|V| = 1$. ❑

Preuve du Lemme 4.3

Un ultrafiltre f étant un filtre, $\emptyset \notin \mathsf{f}$ et donc pour tous $S, T, U \in \mathsf{f}$, $S \cap T \cap U \neq \emptyset$. Inversement, par le Lemme 4.1, on a juste à montrer que f est un filtre. Soient $S, T \in \mathsf{f}$, avec $S \neq T$; supposons que $S \cap T \notin \mathsf{f}$. Alors $N \backslash (S \cap T) \in \mathsf{f}$ et $S \cap T \cap (N \backslash (S \cap T)) = \emptyset$, une contradiction. ❑

Preuve du Lemme 4.4

a) Évident b) Si f n'est pas faible, pour tout i dans N, il existe $S(i)$ dans f tel que $i \notin S$. D'où $\cap\{S(i), i \in N\} = \emptyset$. ❑

Preuve du Théorème 4.1 (Théorème de Guilbaud)

La condition nécessaire étant évidente, nous ne démontrons que la condition suffisante. D'après la Proposition 4.1, pour que f_{f} soit une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences, il faut que f soit un jeu simple propre et fort. D'après le Lemme 4.3, il suffit donc de montrer $\nu(\mathsf{f}) > 3$ et, d'après le Lemme 4.4, on a $\nu(\mathsf{f}) > 2$. Supposons $\nu(\mathsf{f}) = 3$, i.e. l'existence de $S,T,U \in \mathsf{f}$ avec $S \cap T \cap U = \emptyset$. On peut alors, pour trois éléments x,y,z distincts de A, construire un profil π avec $N_\pi(x,y) = S$, $N_\pi(y,z) = T$ et $N_\pi(z,x) = U$, ce qui implique que $f_{\mathsf{f}}(\pi)$ contient le circuit $xR_{\mathsf{f}}(\pi)yR_{\mathsf{f}}(\pi)zR_{\mathsf{f}}(\pi)x$, une contradiction. ❏

Preuve du Lemme 4.5

a) $\Rightarrow$ b) Si R sans circuit est totale, il est facile de vérifier que R est un ordre total. Si R sans circuit n'est pas totale, il existe x et y avec xR^cy et yR^cx. On peut appliquer le même argument soit à $R \cup (x,y)$ soit à $R \cup (y,x)$, puisque au moins l'une de ces deux relations n'a pas de circuit (sinon R a un circuit). Puisque A est fini, on obtient finalement une relation totale sans circuit, donc un ordre total contenant R.

b) $\Rightarrow$ a) Évident. ❏

Preuve du Théorème 4.2 (Théorème de Nakamura)

Condition nécessaire. Supposons d'abord que, pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, $f_{\mathsf{f}}(\pi) = R_{\mathsf{f}}(\pi)$ soit sans circuits (ce qui implique $1 < \nu(\mathsf{f})$) et que $k = \nu(\mathsf{f}) \leq |A|$. Il existe donc $\mathsf{s} = \{S_1,...S_k\} \subseteq \mathsf{f}$ tel que $\cap\mathsf{s} = \emptyset$ et pour tout $\mathsf{s}' \subset \mathsf{s}$, $\cap\mathsf{s}' \neq \emptyset$. Soit $\{x_1,...x_k\}$ un sous-ensemble de k éléments de A. Montrons qu'il existe un profil $\pi = (L_1,...,L_n) \in \mathcal{L}^N$ tel que pour tout $h = 1,...,k$, $N_\pi(x_h,x_{h+1}) \supseteq S_h$ (où k+1 = 1). Alors pour tout $h = 1,...,k$, $N_\pi(x_h,x_{h+1}) \in \mathsf{f}$ et $R_{\mathsf{f}}(\pi)$ contient le circuit $x_1R_{\mathsf{f}}x_2...x_kR_{\mathsf{f}}x_1$, une contradiction. Afin de définir π, nous posons $M = \cup\{S_h, h = 1,...,k\}$, puis pour tout $i \in M$, $\mathsf{s}(i) = \{S_h \in \mathsf{s} : i \in S_h\}$ et $R(i) = \{(x_h,x_{h+1}), h \in \mathsf{s}(i)\}$. Puisque $\cap\mathsf{s}(i)$ contient i, $|\mathsf{s}(i)| < k$. Donc $R(i)$ n'a pas de circuits et par le Lemme 4.5 il existe un ordre total L_i contenant $R(i)$. Le profil π où, pour tout $i \in M$, L_i est l'ordre total ci-dessus et, pour tout $i \notin M$, L_i est un ordre total arbitraire, satisfait les conditions requises.

Condition suffisante. Supposons maintenant $\nu(\mathsf{f}) > |A|$ et l'existence d'un profil $\pi \in \mathcal{L}^N$ tel que $R_{\mathsf{f}}(\pi)$ contienne un circuit $x_1R_{\mathsf{f}}x_2...x_kR_{\mathsf{f}}x_1$ ($k \leq |A|$). Alors pour tout $h = 1,\dots,k$, $N_\pi(x_h,x_{h+1}) \in \mathsf{f}$. Mais $\cap\{N_\pi(x_h,x_{h+1}), h = 1,..,k\} = \emptyset$ (sinon, pour le votant i dans cette intersection, L_i contiendrait un circuit). Donc $\nu(\mathsf{f}) \leq k \leq |A|$, une contradiction. ❏

Preuve du Corollaire 4.1.

1) Par le Théorème de Nakamura, si $|A| = 2$, f_{f} est une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences si et seulement si $\nu(\mathsf{f}) > 2$, donc si et seulement si f est propre (Lemme 4.4). De plus f_{f} est une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences si et seulement si $f_{\mathsf{f}}(\pi)$ est une relation totale, donc si et seulement si f est fort (Proposition 4.1).

2) a) Puisque $|A| \geq 3$, la deuxième assertion est une conséquence immédiate du Théorème de Nakamura et du Lemme 4.3. Supposons maintenant que f_{f} soit une

$\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences. Par le Théorème de Nakamura et le Lemme 4.3, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est fort. Soit $S \subseteq N$ avec $S \notin \mathcal{F}$ et considérons des éléments différents quelconques x, y de A et un profil arbitraire où $N_\pi(x,y) = S$, et donc $(x,y) \notin f_\mathcal{F}(\pi)$. Puisque $f_\mathcal{F}(\pi)$ est une relation totale, on a $(y,x) \in f_\mathcal{F}(\pi)$, et donc $N \backslash S = N_\pi(y,x) \in \mathcal{F}$, c.q.f.d.

b) Si N est fini et $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, $f_\mathcal{F}$ est une projection donc une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences. D'autre part dans le cas fini, $\mathcal{F}$ ultrafiltre est équivalent à $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\{i\}}$ (Lemme 4.2), donc à $f_\mathcal{F}$ dictatoriale absolue. ❑

Preuve du Lemme 5.1

Soient $x \neq y$ et (a,b) un couple avec $a \neq b$ et aRb. Si $y \neq a$, aRb implique aRy qui implique xRy. Si $x \neq b$, xRb implique xRy. Finalement pour $x = b$ et $y = a$, $|A| \geq 3$ implique qu'il existe z distinct de a et b. On a alors aRb implique aRz qui implique bRz qui implique bRa. ❑

Preuve du Théorème 5.1

Montrons d'abord qu'un sous-ensemble S de N est un ensemble décisif si et seulement si S est un (x,y) ensemble décisif pour au moins un couple (x,y) (avec $x \neq y$).

Pour tous $S \subseteq N$ et $x,y \in A$ avec $x \neq y$, nous posons xR_Sy si $S \in \mathcal{F}(x,y)$. Par le Lemme 5.1, pour prouver que $S \in \mathcal{F}(z,t)$ pour tout couple (z,t) avec $z \neq t$, il suffit de prouver que xR_Sy implique xR_Sz et zR_Sy. Soient $S \subset N$ avec $S \in \mathcal{F}(x,y)$, et z différent de x et y. Soit $\pi = (L_1,...,L_n)$ un profil pour lequel xyz pour tout $i \in S$, et yzx pour tout $i \in N–S$. L'ensemble S étant (x,y) décisif et f étant parétienne, $(x,y) \in f(\pi)$ et $(y,z) \in f(\pi)$. Par transitivité de $f(\pi)$, $(x,z) \in f(\pi)$. Puisque $N_\pi(x,z) = S$, nous obtenons $S \in \mathcal{F}(x,z)$. Et considérant un profil π pour lequel zxy pour tout $i \in S$, et yzx pour tout $i \in N–S$, on prouve de même que $S \in \mathcal{F}(z,y)$.

Ainsi pour tous $x,y \in A$ avec $x \neq y$, $\mathcal{F}(x,y)$ égale la famille $\mathcal{F}$ des ensembles décisifs, de sorte qu'on peut écrire :

$$(x,y) \in f(\pi) \Leftrightarrow N_\pi(x,y) \in \mathcal{F}. \tag{2}$$

Par les Définitions 4.4, 4.5 et le Corollaire 4.1,2a, il reste seulement à prouver que $\mathcal{F}$ est un jeu simple. Soient $S \in \mathcal{F}$ et $N \supseteq T \supset S$. Soit $\pi = (L_1,...,L_n)$ un profil pour lequel xyz pour tout $i \in S$, xzy pour tout $i \in T–S$, et zxy pour tout $i \in N–T$. L'ensemble S étant décisif et f étant parétienne, $(x,y) \in f(\pi)$ et $(y,z) \in f(\pi)$. Mais $f(\pi)$ étant transitive, on en déduit $(x,z) \in f(\pi)$. Puisque $N_\pi(x,z) = T$, on obtient que $T \in \mathcal{F}$. ❑

Preuve du Théorème 5.2

Soit f une $\mathcal{O}$-fonction d'agrégation des préférences (donc aussi une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences). La preuve du Théorème 5.1, montrant qu'une $\mathcal{L}$-fonction d'agrégation des préférences indépendantes et parétienne est une fonction $f_\mathcal{F}$ associée à un jeu simple $\mathcal{F}$, utilise seulement ces deux propriétés et la transitivité de $f(\pi)$. Elle est donc toujours vraie. Nous avons donc uniquement à montrer que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ est

$\cap$–stable. La première assertion est une conséquence du Théorème de Nakamura puisque $\nu(\mathsf{f}) > |A| \geq 3$. Soient $S, T \in \mathsf{f}$ avec S Ú T et S Ÿ T ; $\nu(\mathsf{f}) > 3$ implique $S \cap T \neq \emptyset$. Soit $\pi = (L_1,...,L_n)$ un profil pour lequel xyz pour tout $i \in S \cap T$, zxy pour tout $i \in S{-}T$, yzx pour tout $i \in T{-}S$, et zyx pour tout $i \in N{-}(S \cup T)$. Les ensembles S et T étant décisifs, $(x,y) \in f(\pi)$ et $(y,z) \in f(\pi)$. $f(\pi)$ étant transitive, $(x,z) \in f(\pi)$. Puisque $N_\pi(x,z) = S \cap T$, nous obtenons $S \cap T \in \mathsf{f}$. ❑

Preuve du Théorème 5.3

Si f est une $\mathcal{M}$-fonction d'agrégation des préférences avec $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}$ la preuve ci-dessus du Théorème 5.2 reste vraie. Donc si N est fini une telle fonction est une fonction f_{f} associée à un filtre f. Supposons que $\mathcal{M}$ ne soit pas $\cap$-stable et que f filtre de base V (cf. Lemme 4.2) ne soit pas un ultrafiltre. Il existe alors O et O' dans $\mathcal{M}$ avec $O \cap O' \notin \mathcal{M}$, et l'on a $|V| \geq 2$. Soient $i \in V$ et le profil π tel que $L_i = O$, et pour tout $k \in N{-}\{i\}$, $L_k = O'$. Alors $f(\pi) = O \cap O'$, une contradiction. L'implication inverse est évidente. ❑

Preuve du Théorème 5.4

Soit f une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences neutre, monotone et parétienne. Soient un couple (x,y) d'éléments distincts et $\mathsf{f}(x,y)$ la famille des (x,y) ensembles décisifs de f. Le fait que $\mathsf{f}(x,y)$ soit la même famille f pour tout autre couple (z,t) d'éléments distincts est une conséquence immédiate de la neutralité de f. Le fait que f soit un jeu simple est une conséquence immédiate de la monotonie de f. Le théorème de Nakamura implique $\nu(\mathsf{f}) > |A| \geq 3$ et f est aussi propre (Lemme 4.4). L'implication inverse est une conséquence immédiate du Théorème de Nakamura (et du fait qu'une fonction f_{f} associée à un jeu simple f est neutre, monotone et parétienne). ❑

Preuve du Corollaire 5.5

Soit f une $\mathcal{A}$-fonction d'agrégation des préférences neutre, monotone et parétienne avec $|A| \geq |N|$. Par le Théorème 5.4, $f = f_{\mathsf{f}}$ et $\nu(\mathsf{f}) > |N|$. Mais alors le Lemme 4.4 b) implique que f est faible, i.e. est un préfiltre de collège V, et tout votant i de ce collège a un droit de veto. ❑

Preuve du Théorème 6.1 (Théorème d'Arrow)

Soit f une fonction $\mathcal{P}^N \to \mathcal{P}$ indépendante et parétienne. Nous notons f^* la fonction qui à tout profil $\pi \in \mathcal{L}^N$ fait correspondre l'ordre fort correspondant au préordre total $f(\pi)$.

Il est clair que f^* est une $\mathcal{W}$-fonction d'agrégation des préférences indépendante et parétienne. Par le Corollaire 5.4, il existe $k \in N$ tel que pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, $f^*(\pi) = P_k$. Montrons que k est un dictateur pour f. Soient $\pi \in \mathcal{P}^N$ avec $k \in S = N_\pi(x,y)$ (i.e. xP_ky), $T = N_\pi(y,x)$, $U = N{-}(S \cup T)$ (= $\{i \in N : xI_iy\}$). Nous devons montrer xPy. Soit $z \notin \{x,y\}$. Il existe un profil $\pi' \in \mathcal{P}^N$ satisfaisant les conditions suivantes : pour tout $i \in S$, xP_izP_iy ; pour tout $i \in T$, zP_iyP_ix ; pour tout $i \in U$, zP_ix, zP_iy et xI_iy. Il existe un profil $\pi'' \in \mathcal{L}^N$ satisfaisant les conditions suivantes : pour tout $i \in S$, xP_iz ; pour tout $i \in T \cup U$, zP_ix. Le votant k étant un dictateur pour f^*, on a $xP''z$. L'indépendance de f (appliquée aux profils π' et π'' et au sous-ensemble $\{x,z\}$) implique $xP'z$. Le fait que f est parétienne implique $zP'y$. La transitivité de P' implique $xP'y$. Et finalement l'indépendance de f (appliquée aux profils π et π' et au sous-ensemble $\{x,y\}$) implique xPy. ❑

ANNEXE. DEUX PREUVES COURTES DU THÉORÈME D'ARROW

1) La preuve d'Arrow (1952)

Pour cette preuve nous utilisons la notation suivante pour les préférences des votants dans un profil : $(S : xyz\ ; S^c : yzx)$, par exemple, signifie que dans le profil considéré, on a xP_iyP_iz pour tout i de S et yP_izP_ix pour tout i de $S\backslash N$.

Soient f une fonction $\mathcal{P}^N \to \mathcal{P}$ indépendante et parétienne et (x,y) un couple d'éléments distincts de A. Un sous-ensemble S de N est dit un *ensemble* (x,y) *décisif* (pour la fonction f) si pour tout $\pi \in \mathcal{P}^N$ tel que $N_\pi(x,y) = S$ et $N_\pi(y,x) = S^c$, on a xPy.

On remarque que la condition d'indépendance implique qu'un sous-ensemble S de N est (x,y) décisif si et seulement si il existe un profil $\pi \in \mathcal{P}^N$ tel que que $N_\pi(x,y) = S$, $N_\pi(y,x) = S^c$ et xPy.

Montrons d'abord qu'il existe k dans N et a et b distincts dans A tel que $\{k\}$, écrit simplement k, est un ensemble (a,b) décisif. La fonction f étant parétienne, N est (x,y) décisif pour tout couple (x,y). N étant fini, il existe un sous-ensemble S de N tel que S est (a,b) décisif pour au moins un couple (a,b) d'éléments distincts et tel que S soit minimal pour cette propriété. S ne peut être vide (sinon, en considérant un profil où tout votant préfère strictement b à a, on obtient une contradiction). Supposons $|S| \geq 2$ et soit $k \in S$. Considérons un profil π tel que $(k : xab\ ; S{-}k : abx\ ;$ $S^c : bxa)$. L'ensemble S étant (a,b) décisif, on a aPb. L'ensemble $S{-}k$ n'étant pas (a,x) décisif, on a aP^cx et donc, R étant un préordre total, xRa et xPb. Donc k est (x,b) décisif, une contradiction.

Prouvons ensuite que k est un dictateur. Nous montrons d'abord que pour tout x dans A différent de a et b, et pour tout profil π tel que aP_kx, on a aPx. Pour prouver ce résultat, il suffit d'exhiber un ensemble de profils π' tel que aP_kx dans π', $\pi'_{N\text{-}k/\{a,x\}}$ soit arbitraire et $aP'x$ (puisqu'on peut alors utiliser l'indépendance pour montrer que aPx pour tout profil avec aP_kx). Un tel ensemble est obtenu en prenant un ensemble de profils π' avec $(k : abx)$, $bP_i'x$ et $bP_i'a$ pour tout i dans $N{-}k$, et $\pi'_{N\text{-}k/\{a,x\}}$ arbitraire. En effet le votant k étant (a,b) décisif on a $aP'b$, la fonction f étant parétienne on a $bP'x$, et finalement P' étant transitive on a $aP'x$. Le même raisonnement avec y différent de a et b, $(k : yab)$ et yP_ia et bP_ia pour tout i dans $N{-}k$, prouve que pour tout profil π tel que yP_kb, on a yPb. En considérant la relation R définie sur A par zRt si pour tout profil π tel que zP_kt, on a zPt, et en appliquant le Lemme 5.1, on obtient que pour tout (x,y) (avec x différent de y) et pour tout profil π tel que xP_ky, on a xPy. ❑

2) La preuve de Geanakoplos (1996)

Soit un profil $\pi \in \mathcal{P}^N$ tel que pour tout votant k, x est le dernier élément de sa préférence R_k. Par la condition de Pareto, x est le dernier élément de $R = f(\pi)$. Considérons la suite de profils $\pi_1,...,\pi_n$ obtenus lorsque successivement les votants de 1 à n mettent x à la première place de leur préférence. Soit π_i le premier profil pour lequel x n'est plus le dernier élément de la préférence collective (il existe un tel profil puisque, par Pareto, π_n vérifie cette condition) et soit $R^i = f(\pi_i)$; il existe donc z tel que xP^iz. Montrons que x est le premier élément de R^i. Sinon il existe y tel que yP^ix, et par transitivité yP^iz. Soit π' le profil obtenu à partir de π_i en échangeant y et z dans la préférence de chacun des votants qui préfèrent y à z. Par Pareto, $zR'y$. Mais la condition d'indépendance appliquée aux profils π_i, π' et aux sous-ensembles $\{x,y\}$ et $\{x,z\}$ implique que $yP'x$ et $xP'z$, et donc $yP'z$, une contradiction.

Montrons maintenant que le votant « pivot » i est un dictateur « local ». Considérons deux candidats y et z, différents de x. Soit π' le profil obtenu à partir de π_i en changeant la préférence du votant i sur $\{x,y,z\}$ en yP_ixP_iz. La condition d'indépendance appliquée aux profils π_{i-1}, π' et au sous-ensemble $\{x,y\}$ implique qu'on ait $yP'x$ et, appliquée aux profils π_i, π' et au sous-ensemble $\{x,z\}$, qu'on ait $xP'z$. Par transitivité de P, on a $yP'z$. Par la condition d'indépendance yP_iz implique yPz pour tout profil (car le raisonnement précédent peut se faire à partir d'un profil π pour lequel les préférences des votants sur $\{y,z\}$ sont arbitraires), et i est un dictateur pour $\{y,z\}$ (ceci quels que soient y et z différents de x).

Soit maintenant un candidat y différent de x, et z un troisième candidat. Le raisonnement précédent, où π est un profil pour lequel z est dernier dans toutes les préférences, montre qu'il doit y avoir un dictateur pour $\{x,y\}$. Mais le votant i peut changer la préférence collective entre x et y, donc il est un aussi un dictateur pour $\{x,y\}$, et donc un dictateur. ❏

Remerciements. Je remercie Olivier Hudry, Vincent Merlin et les rapporteurs pour leurs utiles remarques et suggestions sur une première version de ce texte.

BIBLIOGRAPHIE

ABDOU J., KEIDING H., *Effectivity functions in social choice*, Kluwer, 1991.

AIZERMAN M., ALESKEROV F., *Theory of choice, Amsterdam*, North-Holland, 1995.

ALESKEROV F.T., « Arrovian Aggregation Models », in *Mathematical and statistical methods*, *Theory and decision library*, Volume 39, Kluwer, 1999.

ANDJIGA N.G., MOULEN J., « Binary games in constitutional form and collective choice », *Mathematical Social Sciences* 16, 1988, p. 189-201.

ANDJIGA N.G., MOULEN J., « Preference aggregation, collective choice and generalized binary constitutions », *Mathématiques et Sciences humaines* 163 , 2003, p. ??.

ARROW K.J., *Social choice and individual values*, New York, Wiley, 1951.

ARROW K.J., « Le principe de rationalité dans les décisions collectives », *Économie appliquée* 5, 1952, p. 469-484.

ARROW K.J., *Social choice and individuel values*, New York, Wiley, (2e ed.), 1963.

ARROW K.J., « Currents developments in the theory of social choice », *Social Research* 44, 1977, p. 607-622.

ARROW K.J. et RAYNAUD H., *Social Choice and Multicriterion Decision-Making*, MIT Press, 1986.

ARROW K.J., SEN, A.K., SUZUMURA K. (eds.), *Handbook of social choice and welfare*, Amsterdam, North-Holland, 2002.

BANKS J.S., « Acyclic social choice from finite sets », *Social Choice and Welfare* 12, 1995, p. 293-310.

BARBERA S., « Pivotal voters. A new proof of Arrow's theorem », *Economics Letters* 6, 1980, p. 13-16.

BARBUT M., FREY L., *Techniques Ordinales en Analyse des Données: Algèbre et Combinatoire*, Paris, Hachette, 1971.

BARTHÉLEMY J.P., « Arrow's theorem: unusual domains and extended codomains », *Mathematical Social Sciences* 3, 1982, p. 79-89.

BATTEAU P. BLIN J.M., MONJARDET B., « Stability of agregation procedures, ultrafilters, and simple games », *Econometric,* 49, 1981, p. 527-534.

BLACK D., *The theory of committees and elections*, Cambridge, Cambridge University Press, 1958.

BLAIR D.H., POLLAK R. A., « Acyclic collective choice rules », *Econometrica* 50, 1982, p. 931-943.

BLAU J.H., « The existence of social welfare fonctions », *Econometrica* 25, 1957, p. 302-313.

CAMPBELL D.E., *Equity, Efficiency, and Social Choice*, Oxford, Clarendon Press, 1982.

CAMPBELL D.E., KELLY J.S., « *t* or 1-*t*. That is the trade-off », *Econometrica* 61, 1993, p.1355-1365.

CARITAT, M.J.A. (Marquis de CONDORCET), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris, 1785.

FEREJOHN J.A., FISHBURN P.C., « Representation of binary decision rules by generalized decisiveness structures », *Journal of Economic Theory* 21, 1979, p. 28-45.

FISHBURN P.C., *The Theory of Social Choice*, Princeton, Princeton University Press, 1973.

FISHBURN P.C., « Lexicographic orders, utilities and decision rules: a survey », *Management Science* 20, 1979, p. 1442-1471.

FISHBURN P.C., « Inverted orders for monotone scoring rules », *Discrete Applied Mathematics* 3, 1981, p. 27-36.

FISHBURN P.C., « Acyclic sets of linear orders », *Social Choice and Welfare* 14, 1997, p. 113-124.

GAERTNER W., « An analysis et comparison of several necessary et sufficient conditions for the transitivity under the majoritary decision rule », in *Aggregation et Revelation des Préférences*, J.J. Laffont (ed.), North Holland, Amsterdam, 1979, p. 91-112.

GAERTNER W., SALLES M., « Procédures d'agrégation avec domaines restreints et théorèmes d'existence », in Analyse et Agrégation des Préférences dans les Sciences Sociales, Économiques et de Gestion, P. Batteau, E. Jacquet-Lagrèze et B. Monjardet (eds.), *Economica*, Paris, 1981, p. 75-122.

GEANAKOPLOS J., *Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem*, Cowles Discussion Paper No. 1123R, 1996.

GIBBARD A., « Manipulation of voting schemes: a general result », *Econometrica* 41, 1973, p. 587-601.

GUILBAUD G.Th., « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », *Économie appliquée* 5, 1952, p. 501-551 (partial translation: « Theories of the general interest and the logical problem of aggregation », in Readings in Mathematical Social Sciences, P. Lazarsfeld et Henry (eds.), *Science Research Associates*, Chicago, 1966).

HANSONN B., « The existence of group preferences », The Mathias Fremling Society Lund, Sweden, working paper n°1, 1972, appeared in *Public Choice* 28, 1976, p. 89-98.

HANSONN B., « The indépendence condition in the theory of social choice », The Mathias Fremling Society Lund, Sweden, working paper n°2, 1972, appeared in *Theory and Decision* 4(1), 1973, p. 25-49.

KELLY J.S., *Arrow impossibility theorems*, New York, Academic Press, 1978.

KIM K.H., ROUSH F.W., *Introduction to Mathematical Consensus Theory*, New York, Marcel Dekker, 1980.

KIRMAN A. P., SONDERMANN D., « Arrow's theorem, many agents and invisible dictators », *Journal of Economic Theory* 5 (2), 1972, p. 267-27.

LE BRETON M., TRUCHON M., « Acyclicity and the dispersion of the veto power », *Social Choice and Welfare* 12(1), 1995, p. 43-58.

LE BRETON M., WEYMARK, R., « Arrovian social choice theory on economic domains », to appear in *Handbook of social choice and welfare*, vol 2, K.J. Arrow, A.K. Sen et K. Suzumura (eds.), Amsterdam, North-Holland, 2003.

MCGARVEY D.C., « A theorem on the construction of voting paradoxes », *Econometrica* 21, 1953, p. 608-10.

MCLEAN I., LONDON J., « The Borda and Condorcet principles: three medieval applications », *Social Choice and Welfare* 7, 1990, p. 99-108.

MONJARDET B., « Remarques sur une classe de procédures de votes et les théorèmes de possibilités », in *La Décision, Agrégation et Dynamique des ordres de préférences*, CNRS, Paris, 1989, p. 177-185.

MONJARDET B., « An axiomatic theory of tournament aggregation », *Mathematics of Operations Research* 3 (4), 1978, p. 334-351.

MONJARDET B., « Social choice theory and "the Centre de Mathématique Sociale". Some historical notes », Cahiers du CAMS, n° 216, 2002.

MOULIN H., *Axioms of cooperative decision making*, Cambridge, Cambridge University Press, 1988.

MURAKAMI Y., *Logic and social choice*, London, Routledge, 1968.

NAKAMURA K., « The vetoers in a simple jeu with ordinal preferences », *International Journal of Game Theory* 8, 1979, p. 55-61.

NAKAMURA K., « The core of a simple game without ordinal preferences », *International Journal of Game Theory* 4 (1), 1975, p. 95-104.

SATTERTHWAITE M.A., « Strategy-proofness and Arrow's condition: existence and correspondence theorems for voting social welfare functions », *Journal of Economic Theory* 10, 1975, p. 187-216.

SEN A.K., *Collective choice and social welfare*, San Francisco, Holden Day,1970.

TRUCHON M., « Voting games and acyclic collective choice rules », *Mathematical Social Sciences* 29, 1996, p. 165-179.

VON NEUMANN J., MORGENSTERN O., *Theory of games and economic behavior, Princeton*, Princeton University Press, 1944.

WILSON R.B., « Social choice theory without the Pareto principle », *Journal of Economic Theory* 5, 1972, p. 478-48.

WILSON R.B., « On the theory of aggregation », *Journal of Economic Theory* 10, 1975, p. 89-99.

« Topological Social Choice », Special issue of *Social Choice and Welfare* 14 (2) 1997.