Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

161 | 2003
161, Recherche opérationnelle et aide à la décision

Vijay V. Vazirani, "Approximation algorithms", Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2001

Vijay V. Vazirani, "Approximation algorithms", Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2001

Olivier Hudry

Édition électronique
URL : http://msh.revues.org/2883
ISSN : 1950-6821

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 1 mars 2003
ISSN : 0987-6936

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

Vijay V. VAZIRANI, *Approximation Algorithms*, Berlin–Heidelberg, Springer-Verlag, 2001.

La théorie de la complexité algorithmique distingue les problèmes polynomiaux des problèmes *NP*-difficiles. Sans entrer dans les détails (que le lecteur intéressé pourra trouver dans [1] ou [2] par exemple), rappelons que les problèmes polynomiaux sont les problèmes que l'on peut résoudre à l'aide d'algorithmes dont le temps de calcul croît au plus comme un polynôme en la taille des données. Au contraire, la conséquence pratique de la *NP*-difficulté d'un problème est que les méthodes de résolution actuellement connues (et plus généralement toutes les méthodes de résolution connues ou inconnues si la conjecture $P \neq NP$ est vraie) pour les résoudre de manière exacte peuvent requérir des temps de calcul croissant exponentiellement avec la taille des données. Une telle croissance exponentielle se traduit par des temps de calcul qui peuvent très facilement dépasser des siècles et qui deviennent donc rapidement prohibitifs. Dans ce cas, il devient déraisonnable d'espérer pouvoir résoudre exactement des données quelconques d'un problème difficile.

Malheureusement, savoir qu'un problème est difficile à résoudre ne dispense pas d'avoir à le résoudre. Mais, au lieu de le résoudre de manière exacte, on peut parfois se contenter d'une solution approchée, surtout si on peut montrer que cette solution ne peut pas être trop mauvaise. C'est l'objectif des *algorithmes d'approximation.* Ainsi, pour un problème d'optimisation, on ne peut garantir d'obtenir systématiquement une solution optimale avec une telle méthode, mais on pourra affirmer que la solution fournie par un algorithme d'approximation ne peut pas être au-delà d'un certain pourcentage d'une solution optimale, tout en conservant un temps de calcul dont la croissante est limitée par un polynôme en la taille des données.

Plus précisément, soit Π un problème d'optimisation consistant à minimiser une certaine fonction f. Un algorithme A de résolution de Π sera qualifié d'*algorithme d'approximation de facteur* ρ s'il existe une fonction ρ définie sur l'ensemble des instances de Π (c'est-à-dire tout jeu de données de Π) telle que pour toute instance I de Π, la valeur $f_A(I)$ proposée par A comme approximation de la valeur minimum $f^*(I)$ de f admise par l'instance I vérifie $f_A(I) \leq \rho(I) \times f^*(I)$ (il existe une variante, correspondant aux *algorithmes d'approximation probabilistes*, où l'inégalité $f_A(I) \leq \rho(I) \times f^*(I)$ n'est pas nécessairement vérifiée systématiquement, mais doit l'être avec une probabilité d'au moins 0,5). De plus, pour qu'il soit intéressant de renoncer au calcul de $f^*(I)$ et de se contenter de $f_A(I)$, il faudra que la complexité de A soit majorée par un polynôme en la taille de l'instance I. Un cas particulièrement intéressant est celui d'un facteur constant : $\rho(I)$ est alors une constante indépendante de I.

C'est par exemple le cas du classique problème du voyageur de commerce. Dans ce problème, un représentant de commerce doit visiter un certain nombre de clients une fois et une seule au cours de sa tournée ; comment organiser celle-ci afin de minimiser la distance (euclidienne) totale parcourue ? On ne connaît pas d'algorithme polynomial pour résoudre ce problème de manière exacte. En revanche, on peut, en temps polynomial, exhiber une tournée qui ne dépassera pas de plus de 50 % la distance minimum. Ceci est dû à l'existence d'un algorithme (polynomial) d'approximation de facteur constant égal à 1,5.

Le livre que propose Vijay V. Vazirani est consacré à ces algorithmes d'approximation. Ses presque quatre cents pages sont organisées en trois parties, augmentées d'annexes.

La première partie, composée de dix chapitres, est consacrée aux « algorithmes combinatoires », pour résoudre les problèmes suivants :

- couverture d'ensembles (*set cover*) ;
- arbre de Steiner ;
- coupe multiple minimum (*multiway cut* et *k-cut*) ;
- localisation de centres dans un graphe ;
- ensemble de sommets en retour (*feedback vertex set*) ;
- plus petite chaîne contenant des chaînes de caractères données (*shortest superstring*) ;
- sac à dos ;
- remplissage de boîtes (*bin packing*) ;
- ordonnancement de tâches (*minimum makespan scheduling*) ;
- voyageur de commerce euclidien.

La deuxième partie, en quinze chapitres, décrit les algorithmes approchés reposant sur la programmation linéaire pour les problèmes ci-dessous :

- couverture d'ensembles de nouveau, mais avec des techniques différentes (relevant de la théorie de la dualité, des méthodes d'arrondi ou exploitant un schéma primal-dual) ;
- « satisfaisabilité » maximum ;
- ordonnancement de tâches (pour un problème différent de celui abordé dans la première partie et nommé en anglais *scheduling on unrelated parallel machines*) ;
- coupe multiple et multi-flots entiers (avec diverses variantes, portant en particulier sur les graphes pour lesquels on souhaite résoudre le problème) ;
- forêt et réseau de Steiner ;
- localisation de centres ;
- *k*-médianne.

Cette partie contient en outre deux chapitres, l'un sur la théorie de la dualité en programmation linéaire, l'autre sur la programmation semi-définie.

La troisième partie complète les deux précédentes en regroupant divers sujets :

- problème du vecteur de norme non nulle minimum ;
- techniques d'approximation pour les problèmes de dénombrement ;
- un chapitre sur la difficulté de l'approximation ;
- enfin un chapitre regroupant des problèmes ouverts.

Le tout est complété par deux annexes (la première proposant un résumé de la théorie de la complexité, l'autre des rappels sur les probabilités), deux index (l'un pour les problèmes traités, le second pour les autres sujets) et bien sûr les nombreuses (263) références bibliographiques. De plus, chaque chapitre propose des exercices, non corrigés (comme c'est souvent le cas), mais parfois accompagnés d'une indication facilitant la résolution. Certains d'entre eux ne se contentent pas d'illustrer les concepts exposés dans le texte, mais prolongent celui-ci comme des sortes d'annexes de taille réduite, permettant ainsi d'aller un peu au-delà de ce qui est présenté dans le chapitre concerné sans que l'ouvrage atteigne un volume inconsidéré.

Le contenu des chapitres tels qu'on vient de les énumérer peut donner l'impression d'un manque de cohérence dans la conception de l'ouvrage, en particulier du fait que certains problèmes apparaissent à plusieurs reprises dans les différentes parties du livre. L'auteur s'en défend et excipe d'une prolepse dans laquelle il précise avoir privilégié les méthodes au détriment des problèmes. Argument convaincant qui justifie finalement le choix de l'auteur. On ne lui fera donc point grief de la structure de l'ouvrage, sauf peut-être sur un point : pourquoi avoir relégué la définition des algorithmes d'approximation à la fin de l'ouvrage, dans la première annexe pour être précis ? Certes des exemples permettent de deviner dès l'introduction de quoi il s'agit, mais une définition générale me paraît avoir sa place dès le début.

En tout cas, par la diversité des méthodes exposées et par le choix des problèmes étudiés, cet ouvrage constitue sans aucun doute une référence pour le domaine des algorithmes d'approximation et pourra avantageusement servir de support de cours, le cas échéant. Il intéressera les algorithmiciens désireux de concevoir (si bien sûr cela est possible) des algorithmes d'approximation pour traiter leurs problèmes difficiles, mais aussi les théoriciens de la complexité, puisque l'existence ou l'inexistence de tels algorithmes pour certains problèmes est intimement liée à la complexité de ces problèmes et, au-delà, à certains problèmes ouverts fondamentaux de la théorie de la complexité (en particulier celui portant sur l'égalité entre P et NP). L'étude des algorithmes d'approximation offre donc un double intérêt : théorique par les informations qu'elle fournit sur la difficulté du problème considéré et par l'approche nouvelle qu'elle propose pour aborder des problèmes ouverts en théorie de la complexité ; pratique car les algorithmes d'approximation constituent un bon compromis entre des méthodes exactes impossibles en pratique à mettre en œuvre à cause du temps de calcul qu'elles requièrent et des heuristiques polynomiales qui ne fournissent aucune indication sur la qualité de la solution proposée. Un livre que l'on s'attend donc à trouver dans de nombreuses bibliothèques. Signalons pour finir qu'une traduction en français est en cours et devrait voir le jour en 2003.

O. Hudry

[1] BARTHÉLEMY J.-P., COHEN G., LOBSTEIN A., *Complexité algorithmique et problèmes de communications*, Masson, Paris, 1992 ; traduction anglaise sous le titre *Algorithmic Complexity and Communication Problems*, Londres, UCL Press, 1996.

[2] GAREY M.R., JOHNSON D.S., *Computers and intractability, a guide to the theory of NP-completeness*, New York, Freeman, 1979.

ERRATUM

Une erreur s'est glissée dans l'index des articles publié dans le numéro 160 de Mathématiques et Sciences humaines.

Lire, dans la liste analytique des articles, aux rubriques A, D, H

I. SAILLOT, M. PATOU-MATHIS, J.-F. RICHARD, E. SANDER, S. POITRENAUD, *Modéliser les activités cognitives des hommes au paléolithique*, n° 159, automne 2002
