

## ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ ПЛИТЫ ПОКРЫТИЯ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

*С.Д. Семенюк, Р.В. Кумашов*

Белорусско-Российский университет, г. Могилев, Республика БЕЛАРУСЬ

**Аннотация:** Статический анализ НДС плиты на упругом основании выполняется двумя способами на примере железобетонной дорожной плиты покрытия 2ПП30.18-30 серии Б3.503.1-1, предназначенной для временных дорог. Данные плиты рассматриваются как плоскостные конструкции на упругом основании под воздействием эксплуатационных нагрузок. Плита рассчитана способом Б.Н. Жемочкина с использованием метода Ритца, для определения прогибов плиты в основной системе, с применением математического пакета «MathCad». Также выполнен дублирующий статический расчет плиты на ПК «ЛИРА». Приводятся результаты экспериментальных и численных исследований.

**Ключевые слова:** железобетонная дорожная плита покрытия, плоскостная конструкция, упругое основание, способ Б.Н. Жемочкина, метод Ритца, расчетная модель, контакт, эпюра, каноническое уравнение, эксперимент

## REINFORCED CONCRETE COATING PLATES OF HIGHWAYS ON AN ELASTIC HALF-SPACE

*Slava D. Semeniuk, Roman V. Kumashov*

Belarusian-Russian University, Mogilev, BELARUS

**Abstract:** Static analysis of the stress-strain state of a plate on elastic foundation is made in two ways on the example of a reinforced concrete road plate 2PP30.18-30 series B3.503.1-1 intended for temporary roads. These plates are considered as a planar structure on an elastic foundation. The plates are calculated by the method of B.N. Zhemochkin using the Ritz method to determine plate deflections in the main system using the mathematical package «MathCad». Also the plates are calculated on the PC «LIRA». There are given the results of experimental and numerical studies in this article.

**Keywords:** reinforced concrete road plate, planar structure, elastic foundation, Zhemochkin method, Ritz method, calculation model, contact, diagram, canonical equation, experiment

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В современных автомобильных дорогах все большее значение приобретают монолитные и сборные железобетонные покрытия, предназначенные для автомобильного движения большой интенсивности, скорости и грузоподъемности.

Неравномерные деформации основания и несимметричность приложения нагрузки приводят к возникновению в сечениях плит

изгибающих и крутящих моментов, что отрицательно сказывается на эксплуатационных характеристиках данных плит. В общем случае плиты работают как пространственные конструкции, поэтому требуется учитывать влияние каждого из воздействий на несущую способность железобетонных плитных конструкций при их проектировании и изготовлении [1].

## 2. ТЕОРИЯ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЁТА ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Расчёт плит выполняется способом Б.Н. Жемочкина [2] (общая постановка и аналитическое решение) и, частично, методом Ритца (определение прогибов плиты в основной системе) с применением математического пакета «MathCad».

Данный подход позволяет рассчитывать плиты на произвольном линейно-упругом деформируемом основании любой формы в плане и загруженные произвольной нормальной к срединной плоскости плиты внешней нагрузкой [3].

Плиты разбиваются на прямоугольные участки Б.Н. Жемочкина (рис. 1). В середине каждого участка ставится связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием, а в центре плиты вводится защемление. Принимается, что усилие в каждой связи вызывает равномерное распределение реактивных давлений в пределах участка Б.Н. Жемочкина [2].

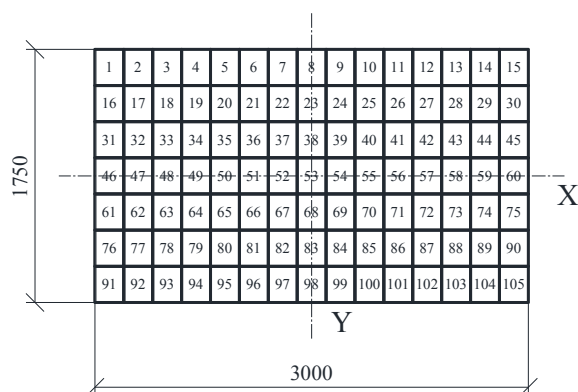


Рисунок 1. Пример разбивки плиты на участки Б.Н. Жемочкина.

При определении перемещений точки  $M(x,y)$ , находящейся на поверхности упругого однородного изотропного полупространства от действия единичной силы, распределенной по площади участка  $\Omega$  поверхности полупространства, необходимо вычислить интеграл:

$$W_m(x,y) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad (1)$$

где  $\Omega$  – площадь участка Б.Н. Жемочкина. Перемещение точки  $M(x,y)$ , поверхности упругого полупространства при загрузении участка прямоугольной формы на поверхности полупространства равномерно распределенной нагрузкой с равнодействующей, равной 1, после вычисления интеграла (1) имеет вид:

$$W_M(x,y) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \left[ \frac{y-d}{\Delta_y} \times \right. \\ \times \ln \frac{x-b + \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2}}{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-d)^2}} + \\ + \frac{y-c}{\Delta_y} \ln \frac{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2}}{x-b + \sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}} + \\ + \frac{x-b}{\Delta_y} \ln \frac{y-d + \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2}}{y-c + \sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}} + \\ \left. + \frac{x-a}{\Delta_y} \ln \frac{y-c + \sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2}}{y-d + \sqrt{(x-a)^2 + (y-d)^2}} \right], \quad (2) \\ \Delta_x = b-a, \quad \Delta_y = d-c,$$

где  $a, b, c, d$  – координаты границ участка Б.Н. Жемочкина [3].

Для расчёта при определении коэффициентов канонических уравнений способа Б.Н. Жемочкина задаётся функцией прогибов прямоугольной плиты с защемленной в начале координат нормалью в виде особого решения и совокупности частных решений Клебша:

$$W(x,y) = W_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n(x,y) \quad (3)$$

$$W_0(x,y) = \frac{Pb^2}{16\pi D} \left\{ \left[ \left( \frac{x}{b} - \frac{t}{b} \right)^2 + \left( \frac{y}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \ln \left[ \left( \frac{x-t}{b} - \frac{t}{b} \right)^2 + \left( \frac{y-z}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] + \\ & + 2 \left( \frac{xt}{b^2} - \frac{yz}{b^2} \right) \times \left[ 1 + \ln \left( \frac{t^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \right] - \\ & - \left( \frac{t^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \times \ln \left( \frac{t^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) - \\ & - \left( \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \ln \left( \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \} \\ W_1(x, y) &= \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad W_2(x, y) = \frac{2xy}{b^2}, \end{aligned}$$

$$W_3(x, y) = \frac{x}{b} \left( \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right), \quad W_4(x, y) = \frac{y}{b} \left( \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right), \dots,$$

где  $W_0(x, y)$  – особое решение;  $W_n(x, y)$  – частное решение Клебша, априори удовлетворяющее уравнениями равновесия плиты с защемлённой нормалью под действием сосредоточенной силы и кинематическим граничным условиям во введенном защемлении;  $t, z$  – координаты точки приложения сосредоточенной силы;  $A_n$  – неопределённые коэффициенты;  $b$  – некоторый линейный размер плиты [3].

При определении коэффициентов канонических уравнений способа Б.Н. Жемочкина для расчета прямоугольной плиты на произвольном упругом основании можно написать:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \frac{(P=1)(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 b} (F_{ik}^0 + F_{ik}^1) + \\ &+ \frac{(P=1)b^2}{D} \left[ A_{22} \left( \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + 2B_{22} \frac{xy}{b^2} + \dots \right], \quad (4) \end{aligned}$$

где  $F_{ik}^0$  – безразмерная функция для определения перемещений точки  $i$  на поверхности упругого основания от действия единичной силы, равномерно распределённой по прямоугольному участку  $k$  поверхности полупространства. Определяется выражением (2);  $F_{ik}^1$

– корректирует  $F_{ik}^0$  применительно к рассматриваемой модели упругого основания.

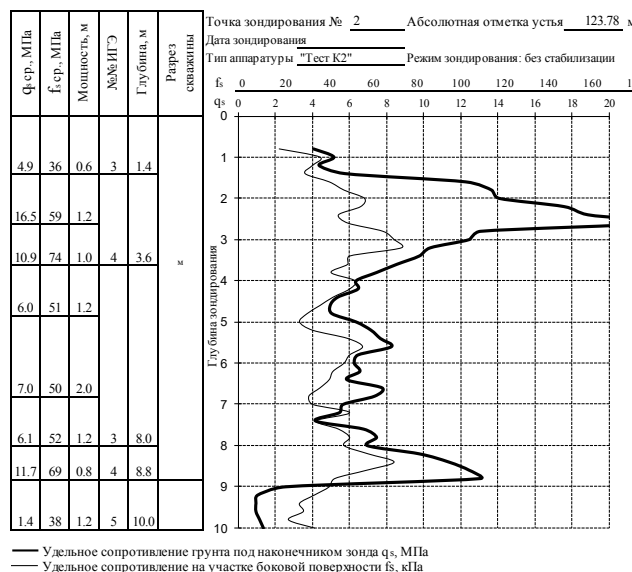
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \delta_{ik} R_k + \varphi_{0x} y_i + \varphi_{0y} x_i + u_0 + \Delta_{ip} \right) = 0; \\ - \sum_{k=1}^n R_k y_k + M_{px} = 0; \\ - \sum_{k=1}^n R_k x_k + M_{py} = 0; \\ - \sum_{k=1}^n R_k + Q = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $u_0, \varphi_{0x}, \varphi_{0y}$  – линейное и угловые перемещения введённого защемления на плите;  $Q, M_{px}, M_{py}$  – равнодействующая внешних сил, действующих на плиту, и ее моменты относительно координатных осей;  $R_k$  – реактивные усилия.

После решения системы канонических уравнений (5) по найденным значениям реактивных усилий  $R_k$  находятся реактивное давление под плитой и осадка. Далее по известным значениям осадок точек плиты легко определить изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы в сечениях плиты.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Испытания проводятся с целью определения реального распределения осадок упругого основания под плитой дорожного покрытия. До проведения испытания на площадке были выполнены инженерно-геологические изыскания. Результаты статического зондирования грунтов приведены на рис. 2.



**Рисунок 2.** Результаты статического зондирования на площадке проведения испытаний.

По результатам статического зондирования для каждого грунта в соответствии с таблицей 6.7 ТКП 45-5.01-15-2005 определен модуль деформации грунта (Таблица 1).

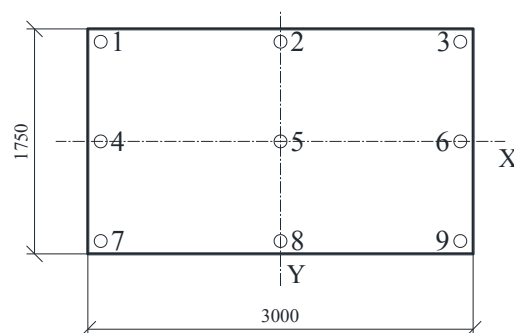
**Таблица 1.** Характеристики грунтов.

Номер слоя	Тип грунта	Мощность слоя, м	$q_s$ МПа	$E_0$ МПа	$\nu$
1	Песок мелкий	0,8	0,5	4,0	0,3
2		0,6	4,9	19,8	
3		1,2	16,5	44,4	
4		1,0	10,9	32,7	
5		1,2	6,0	22,0	
6		2,0	7,0	24,0	
7		1,2	6,1	22,2	
8		0,8	11,7	35,0	

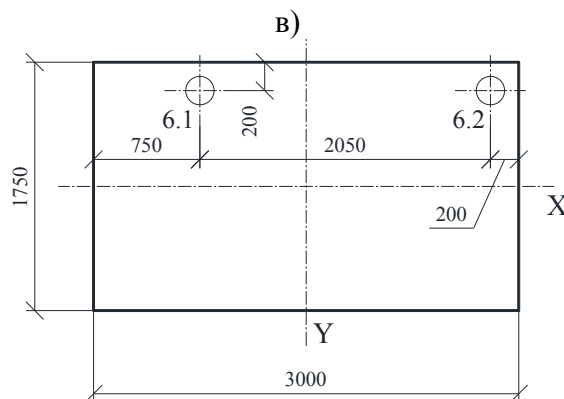
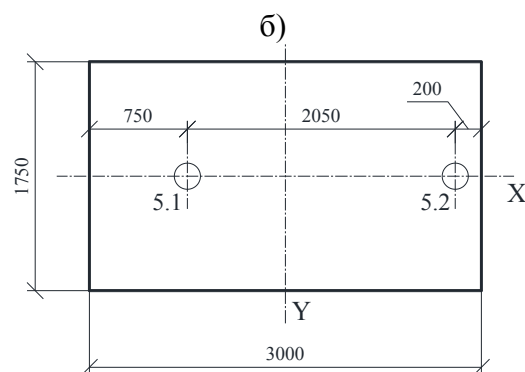
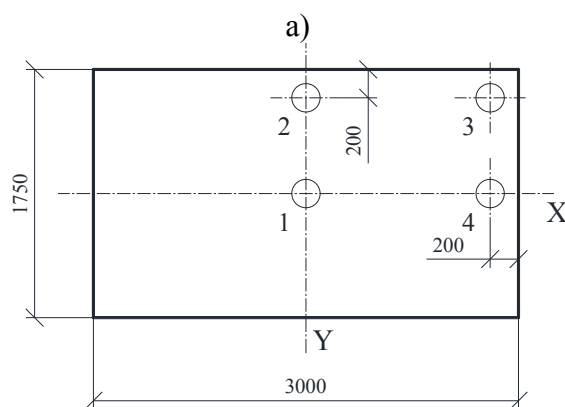
Измерение перемещений производилось 9 прогибомерами с точностью 0.01 мм. Точки закрепления прогибомеров приведены на рис. 3.

Испытание плиты производилось для следующих расчетных схем:

а – одно колесо на плите. Последовательно в 4 точках (в центре плиты, на краях плиты и в углу плиты, см. рис. 4а) производится испытание одним домкратом на нагрузку 100 кН;



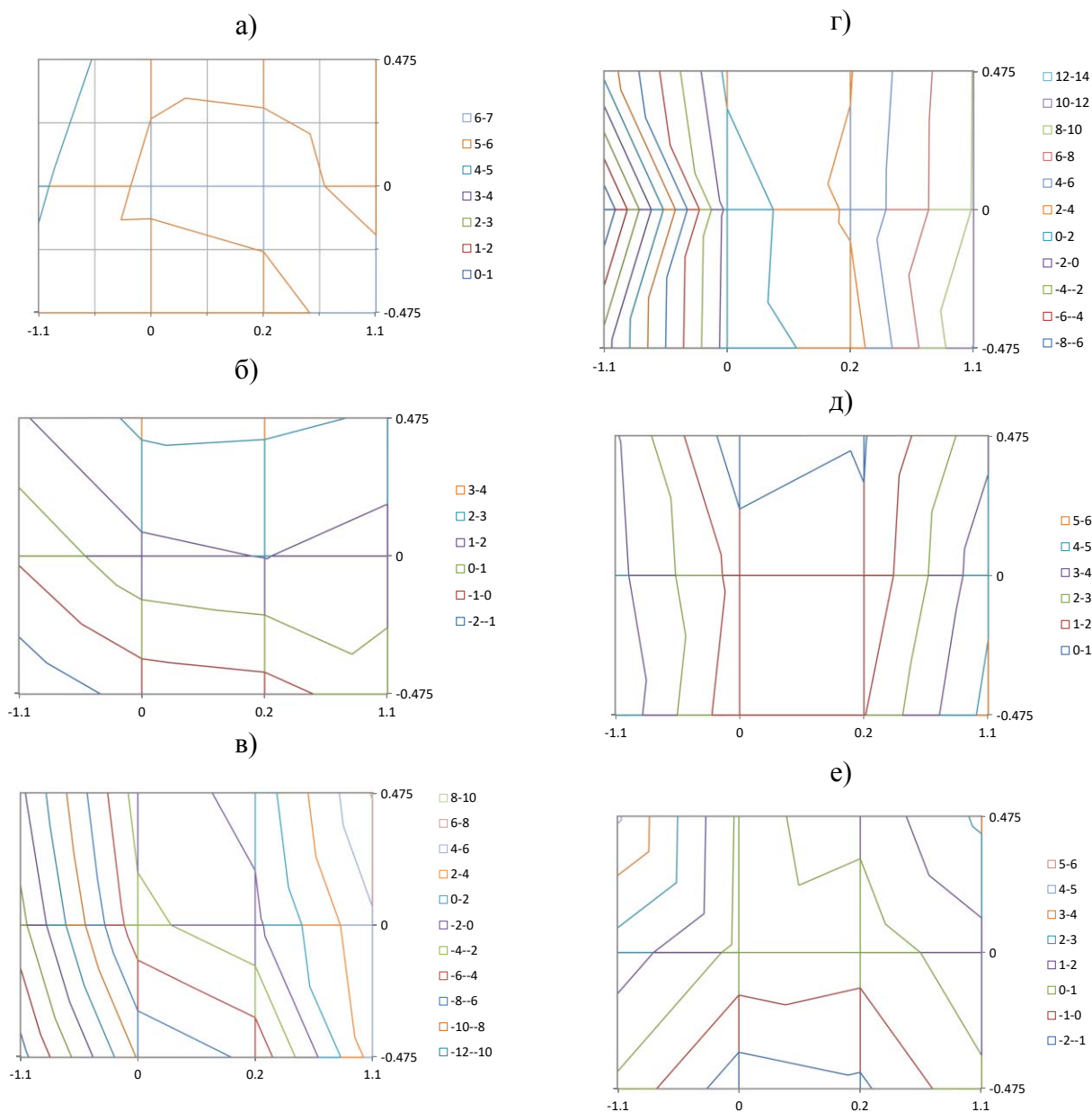
**Рисунок 3.** Схема расположения прогибомеров 6 ПАО с ценой деления 0.01.



**Рисунок 4.** Схемы расположения домкратов при испытаниях.

б – два колеса на плите. Производится испытание одновременно двумя домкратами в середине плиты (рис. 4б) на нагрузку 100 кН каждый, следующее испытание – на краю плиты (рис. 4в) на нагрузку 100 кН каждый. Испытание производилось в каждой из 6 точек последовательным приложением

нагрузки ступенями до максимальной величины, равной 100 кН. В процессе испытания замерялись только вертикальные перемещения. Результаты экспериментальных исследований приведены на рис. 5.



**Рисунок 5.** Распределение осадок основания плиты по результатам эксперимента:  
а) загрузка 1; б) загрузка 2; в) загрузка 3; г) загрузка 4; д) загрузка 5; е) загрузка 6.

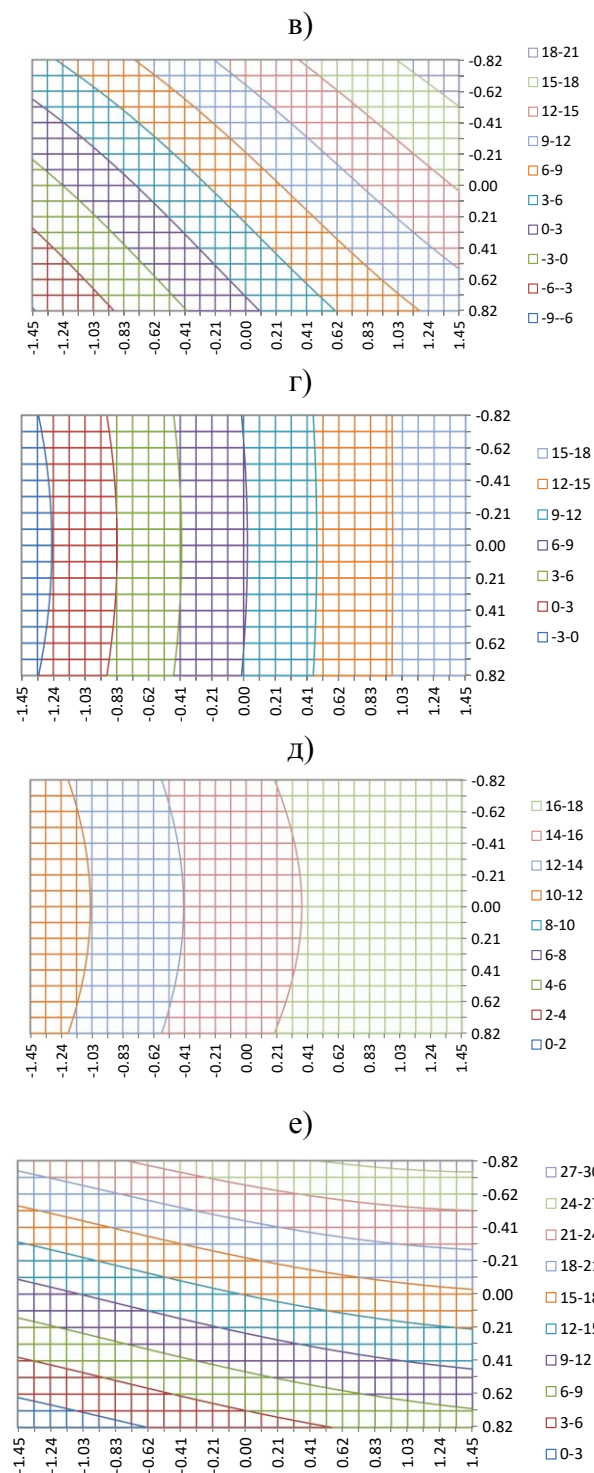
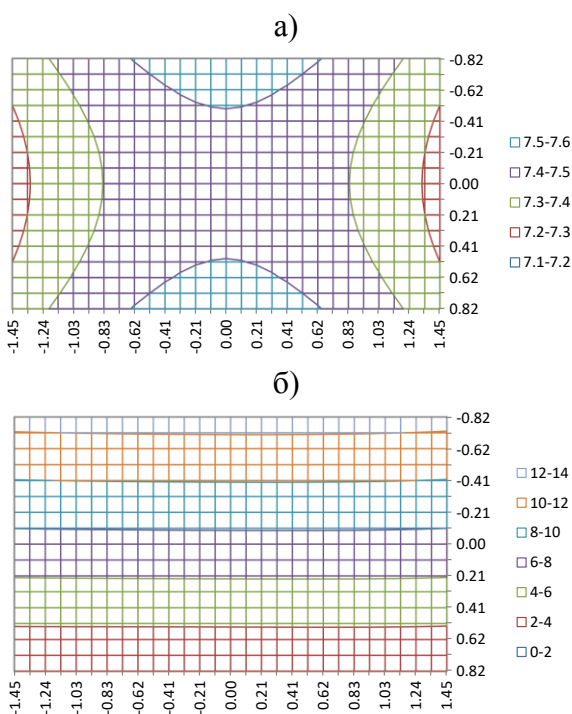
После проведения экспериментальных исследований было выполнено численное исследование рассматриваемой плиты на идентичные нагрузки и загрузения. Статический расчет плиты выполнен способом Б.Н. Жемочкина. Эквивалентный модуль деформации основания плиты, равный  $E_0^9 = 4,65 \text{ МПа}$  (в расчет приняты три верхних слоя грунта), вычислен по формуле:

$$E_0^9 = \frac{\left[ 1.05 - 0.1 \cdot \frac{h_i}{D} \cdot \left( 1 - 3 \sqrt{\frac{E_{\text{общ}}}{E_i}} \right) \right] \cdot E_i}{0.71 \cdot 3 \sqrt{\frac{E_{\text{общ}}}{E_i}} \cdot \arctg \left( \frac{1.35 \cdot h_9}{D} \right) + \frac{E_i}{E_{\text{общ}}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \arctg \left( \frac{D}{h_9} \right)}$$

$$\frac{h_9}{D} = \frac{2 \cdot h_i}{D} \cdot 3 \sqrt{\frac{E_{\text{общ}}}{6 \cdot E_i}},$$

где  $i$  – номер, рассматриваемого слоя;  $h_i$  – толщина  $i$ -го слоя;  $D$  – диаметр нагруженной площади;  $E_{\text{общ}}$  – общий модуль упругости полупространства, подстилающего  $i$ -ый слой;  $E_i$  – модуль деформации  $i$ -го слоя.

Результаты расчета приведены на рисунке 6.



**Рисунок 6. Распределение осадок основания плиты при расчете способом Б.Н. Жемочкина:**  
 а) загрузка 1; б) загрузка 2;  
 в) загрузка 3; г) загрузка 4;  
 д) загрузка 5; е) загрузка 6.

Рассматриваемая выше плита была также рассчитана в программном комплексе «Ли́ра».

При постановке задачи используются следующие гипотезы и допущения: в зоне контакта плиты с упругим основанием возникают только нормальные напряжения, силы трения пренебрежительно малы.

В расчет принимаются следующие упругие характеристики: для плиты – конечный элемент КЭ-41,  $E = 31500 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0,167$ ,  $H = 0,17 \text{ м}$ ; для основания – конечный элемент КЭ-36, модуль упругости  $E_0$  и коэффициент Пуассона  $\nu_0$  в соответствии с таблицей 1. На рисунке 7 приведена расчетная модель плиты в ПК «Ли́ра».

Размеры расчетной области основания составляют 18а и 18б соответственно в продольном и поперечном направлениях. Здесь а и б – полуширина плиты в продольном и поперечном направлениях. Глубина расчетной области основания составляет 6а.

Результаты расчета приведены на рисунке 7.

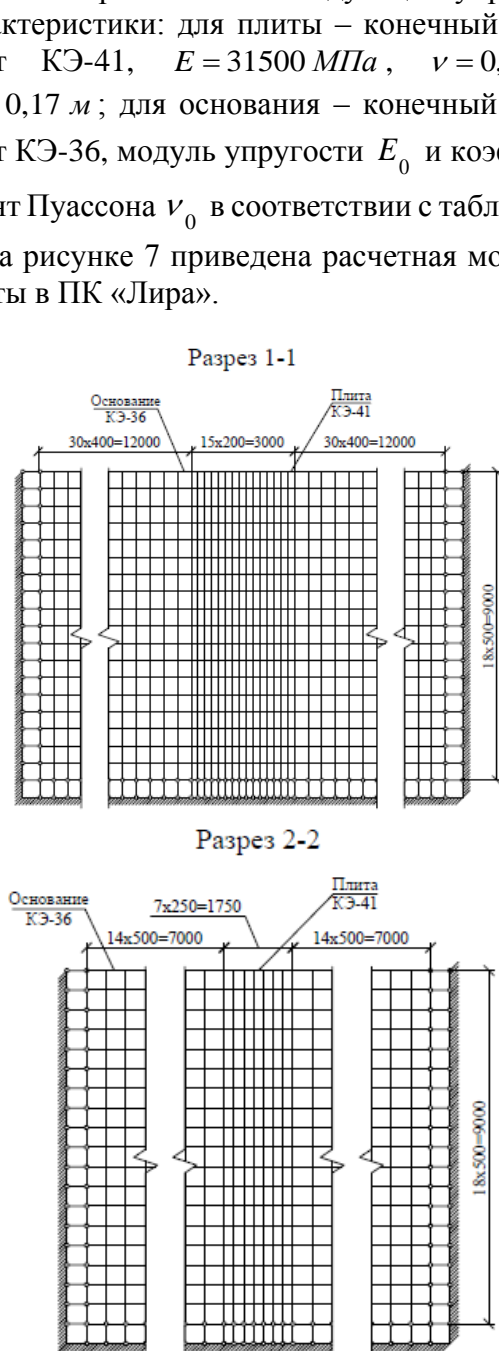
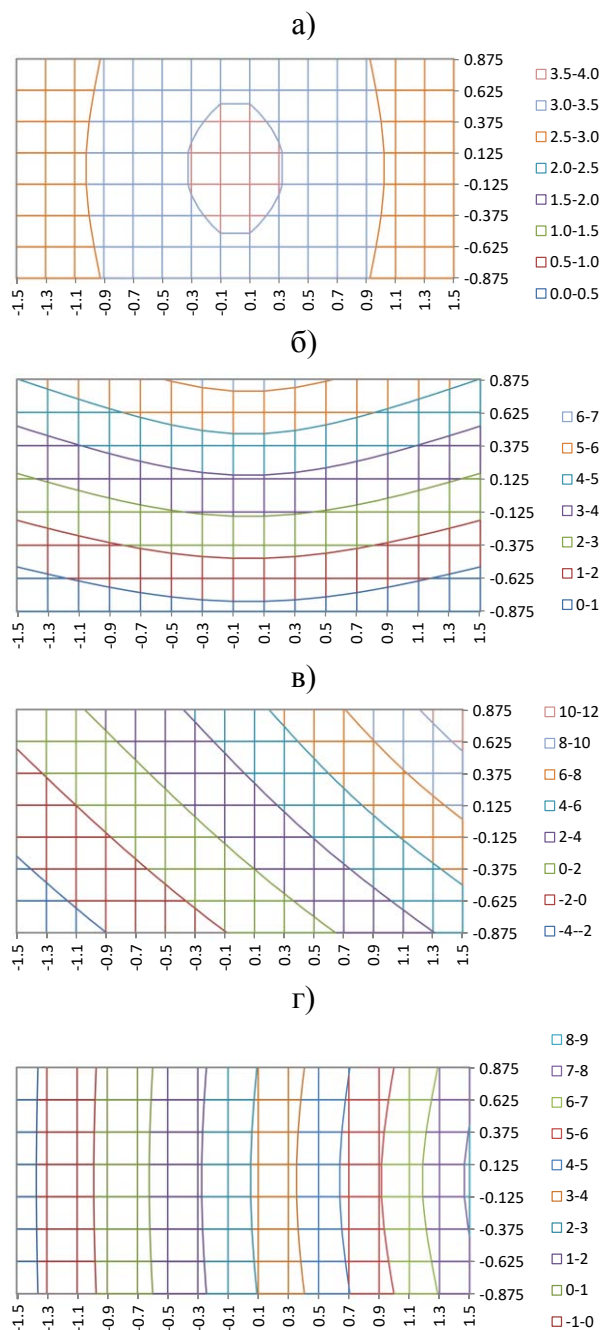
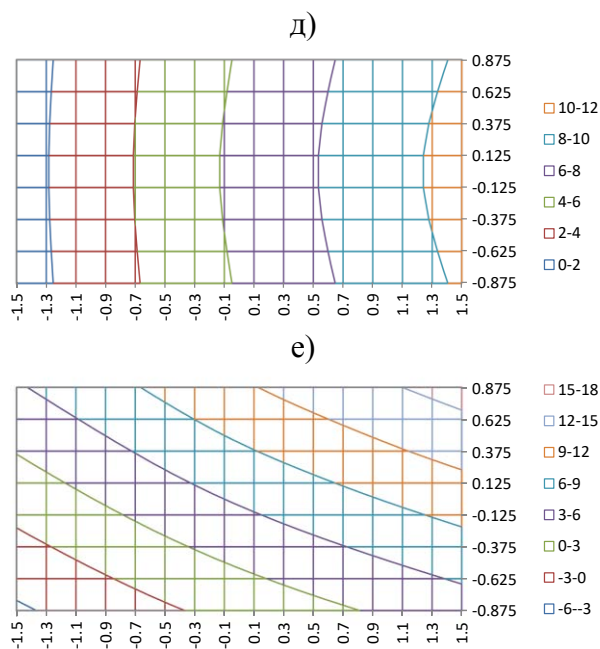


Рисунок 7. Расчетная модель плиты в ПК «ЛИРА».





**Рисунок 8.** Распределение осадок основания плиты при расчете в ПК «Ли́ра»: а) загрузка 1; б) загрузка 2; в) загрузка 3; г) загрузка 4; д) загрузка 5; е) загрузка 6.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Статический расчёт и экспериментальные исследования показывают, что в условиях эксплуатации плиты покрытия автодорог всегда будут подвержены сложному деформированию, так как нагрузки от колес автомобиля прикладываются вне оси симметрии плиты и дорожное основание под плиты неоднородно как по длине плиты, так и по ширине.

По результатам сравнения экспериментальных и численных исследований можно отметить, что способ Б.Н. Жемочкина позволяет довольно точно отразить общую тенденцию распределения осадок под плитой. Однако, в связи с довольно большим расхождением значений осадок, требуется корректировка расчетной модели и уточнение параметров плиты. При расчете в ПК «Ли́ра» моделирование слоистого основания позволяет при определении осадок плиты приблизиться к резуль-

татам экспериментального исследования. Однако, наблюдается расхождение при крайних загрузках плиты.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кумашов Р.В.** Статический расчет железобетонных плит покрытий автомобильных дорог на упругом основании. // Вестник гражданских инженеров, 2016, №5(58), с. 127-132.
2. **Жемочкин Б.Н.** Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. – М.: Госстройиздат, 1962. – 240 с.
3. **Босаков С.В.** Статические расчеты плит на упругом основании. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.
4. **Семенюк С.Д.** Расчет плит покрытия автомобильных дорог на эксплуатационные нагрузки способом Б.Н. Жемочкина. // Инженерно-геотехнические изыскания, проектирование и строительство оснований, фундаментов и подземных сооружений: сборник трудов Всероссийской научно-технической конференции. – СПб.: СПбГАСУ, 2017, с. 139-145.
5. **Семенюк С.Д.** Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформированном основании. – Могилев: Белорусско-Российский университет, 2003. – 269 с.

#### REFERENCES

1. **Kumashov R.V.** Staticheskii Raschet Zhelezobetonnykh Plit Pokrytii Avtomobil'nykh Dorog na Uprugom Osnovanii [Static Analysis of Reinforced Concrete Slabs of Coatings of Motor Roads on an Elastic Foundation]. // Vestnik grazhdanskikh inzhenerov, 2016, No. 5(58), pp. 127-132.

2. **Zhemochkin B.N.** *Prakticheskie Metody Rascheta Fundamentnykh Balok i Plit na Uprugom Osnovanii* [Practical Methods of Analysis of Foundation Beams and Plates on an Elastic Foundation]. Moscow, Gostroiizdat, 1962, 240 pages.
3. **Bosakov S.V.** *Sticheskie Raschety Plit na Uprugom Osnovanii* [Static Analysis of Plates on an Elastic Foundation]. Minsk, Belarusian National Technical University, 2002, 128 pages.
4. **Semeniuk S.D.** *Raschet Plit Pokrytiia Avtomobil'nykh Dorog na Ekspluatatsionnye Nagruzki Sposobom B.N. Zhemochkina* [Analysis of Plates for Covering Motor Roads for Operational Loads by the Method of B.N. Zhemochkina]. // Proceedings of All-Russian Scientific and Technical Conference "Inzhenerno-geotekhnicheskie izyskaniia, proektirovanie i stroitel'stvo osnovanii, fundamentov i podzemnykh sooruzhenii". Saint Petersburg, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 2017, pp. 139-145.
5. **Semeniuk S.D.** *Zhelezobetonnye Prostranstvennye Fundamenty Zhilykh i Grazhdanskikh Zdanii na Neravnomerno Deformirovannom Osnovanii* [Reinforced Concrete Spatial Foundations of Residential and Civil Buildings on an Unevenly Deformed Base]. Mogilev, Belarusian-Russian University, 2003, 269 pages.

E-mail: skzs@bru.by.

Roman V. Kumashov, Post-graduate student of Belarusian-Russian University; 43, prospect Mira, Mogilev, 212000, Belarus; phone: +375 (29) 306-21-18; fax: +375 (222) 22-58-21; e-mail: gunner09@yandex.ru.

---

Семенюк Слава Денисович, профессор, доктор технических наук; Белорусско-Российский университет; 212000, Республика Беларусь, г. Могилев, проспект Мира, д. 43; тел: +375 (222) 22-09-27; факс +375 (222) 22-58-21; e-mail: skzs@bru.by.

Кумашов Роман Владимирович, кандидат технических наук; Белорусско-Российский университет; 212000, Республика Беларусь, г. Могилев, проспект Мира, д. 43; тел: +375 (29) 306-21-18; факс +375 (222) 22-58-21; E-mail: gunner09@yandex.ru.

Slava D. Semeniuk, Professor, Dr.Sc.; Belarusian-Russian University; 43, prospect Mira, Mogilev, 212000, Belarus; phone: +375 (222) 22-09-27; fax: +375 (222) 22-58-21;