

РАСЧЕТ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НА ВХОДЕ ФИЛЬТРА

Л.И. Кузьмина¹, Ю.В. Осипов²

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, РОССИЯ

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается задача фильтрации суспензии в пористой среде с геометрическим механизмом захвата частиц. В пористой среде имеется первоначальный осадок, неравномерно распределенный вдоль фильтра. Нелинейная модель долговременной глубинной фильтрации предполагает, что пористость и проницаемость пористой среды зависят от величины осадка. Определяется асимптотика подвижной границы раздела двух фаз. Асимптотическое решение задачи построено и рассчитано вблизи входа фильтра.

Ключевые слова: фильтрация, пористая среда, взвешенные и осажженные частицы, граница раздела фаз, асимптотика.

CALCULATION OF THE FILTRATION PROBLEM AT THE FILTER INLET

Ludmila I. Kuzmina¹, Yuri V. Osipov²

¹ National Research University Higher School of Economics, Moscow, RUSSIA

² Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: Filtration of the suspension in a porous medium with a geometric particle capture mechanism is considered. The porous medium has an initial deposit unevenly distributed across the filter. The nonlinear model of deep bed filtration suggests that the porosity and permeability of the porous medium depend on the deposit. The asymptotics of the movable boundary of the two phases is determined. The asymptotic solution of the problem is constructed and calculated near the filter inlet.

Keywords: deep bed filtration, porous medium, suspended and retained particles, phase boundary, asymptotic solution.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие грунтовые пласты и строительные материалы являются пористыми средами, способными накапливать влагу и содержащиеся в ней частицы. Задачи фильтрации описывают процесс прохождения суспензии – жидкости с твердыми взвешенными микроскопическими частицами через пористую среду. Некоторые частицы проходят через пористую среду, а часть застревает в порах и образует осадок. При накоплении осадка меняется структура пористой среды, прочность и проницаемость грунтов и материалов. Теоретические исследования, полевые изыскания и лабораторные эксперименты позволили построить различные модели фильтра-

ции [1-5]. В настоящей работе рассматривается одномерная модель долговременной глубинной фильтрации с механико-геометрическим механизмом захвата частиц [6,7]. Два уравнения в частных производных первого порядка, описывающие баланс масс взвешенных и осажженных частиц и скорость роста осадка, образуют нелинейную гиперболическую систему. В ряде случаев для данной модели найдены точные решения [8-11]. При отсутствии точного решения строятся асимптотики, позволяющие приближенно моделировать задачу [12-14], и выполняются численные расчеты [15-17]. При периодической закачке суспензии в пористую среду в порах происходит накопление осадка. Рассмотрим один из шагов дан-

ного процесса. В начальный момент пористая среда заполнена чистой водой и в порах имеется первоначальный осадок, неравномерно распределенный вдоль фильтра. На вход фильтра подается суспензия постоянной концентрации, которая движется через поры и постепенно вытесняет воду. Модель учитывает изменение пористости и проницаемости пористой среды при увеличении концентрации осадка. В статье определена асимптотика подвижной границы раздела двух фаз, построено асимптотическое решение задачи вблизи входа фильтра и выполнен расчет асимптотики.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Фильтрация суспензии в пористой среде с неизвестными концентрациями взвешенных $C(x, t)$ и осажженных $S(x, t)$ частиц описывается системой уравнений

$$\frac{\partial(g(S)C)}{\partial t} + \frac{\partial(f(S)C)}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C. \quad (2)$$

Здесь коэффициент фильтрации $\Lambda(S)$, пористость $g(S)$ и проницаемость $f(S)$ неотрицательны и гладко зависят от осадка $S(x, t)$. Соответствующие начальные и краевые условия имеют вид

$$C|_{x=0} = 1; \quad (3)$$

$$C|_{t=0} = 0; \quad S|_{t=0} = p(x). \quad (4)$$

Условия (3), (4) определяют единственное решение задачи в области

$$\Omega = \{(x, t): 0 < x < 1, t > 0\}.$$

Область Ω состоит из двух подобластей Ω_s и Ω_w , в которых находятся вода и суспен-

зия. Подвижная граница раздела двух фаз – фронт концентрации взвешенных частиц суспензии распространяется в пористой среде с переменной скоростью

$$v(x) = f(p(x)) / g(p(x))$$

вдоль характеристики, заданной уравнением

$$dx / dt = v(x), \quad x(0) = 0.$$

Граница Γ задается уравнением

$$t_\Gamma(x) = \int_0^x \frac{g(p(y))}{f(p(y))} dy. \quad (5)$$

Перед фронтом концентрации в области чистой воды Ω_w решение не зависит от времени:

$$C = 0, \quad S = p(x).$$

За фронтом концентрации в области суспензии Ω_s решение положительно:

$$C(x, t) > 0, \quad S(x, t) > 0.$$

На границе Γ решение $C(x, t)$ имеет разрыв, а $S(x, t)$ теряет гладкость.

Зададим условие на характеристике Γ

$$S|_{t=t_\Gamma(x)} = p(x), \quad 0 < x < 1. \quad (6)$$

В области Ω_s решение задачи Гурса (1) – (3), (6) совпадает с решением исходной задачи (1) – (4) и является гладким.

3. АСИМПТОТИКА ВБЛИЗИ ВХОДА ФИЛЬТРА

В окрестности входа фильтра $x = 0$ будем искать асимптотику решения в виде

$$\begin{aligned} C(x, t) &= 1 + c_1(x, t)x + O(x^2); \\ S(x, t) &= s_0(x, t) + s_1(x, t)x + O(x^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Представим коэффициенты системы (1), (2) в виде ряда по степеням малого x :

$$\begin{aligned} g(S) &= g(s_0) + g'(s_0)s_1x + O(x^2); \\ f(S) &= f(s_0) + f'(s_0)s_1x + O(x^2); \\ \Lambda(S) &= \Lambda(s_0) + \Lambda'(s_0)s_1x + O(x^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим разложения (7), (8) в систему (1), (2). Приравняв слагаемые при старших степенях x , получаем рекуррентную систему уравнений

$$s'_0 = \Lambda(s_0); \quad (9)$$

$$g'(s_0)s'_0 + f'(s_0)s_1 + f(s_0)c_1 + \Lambda(s_0) = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = \Lambda'(s_0)s_1 + \Lambda(s_0)c_1. \quad (11)$$

Выразим c_1 из уравнения (10)

$$c_1 = -\frac{g'(s_0)s'_0 + f'(s_0)s_1 + \Lambda(s_0)}{f(s_0)}, \quad (12)$$

и подставим в (11). Получим уравнение

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = P(s_0)s_1 - Q(s_0). \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P(s_0) &= \frac{\Lambda'(s_0)f(s_0) - \Lambda(s_0)f'(s_0)}{f(s_0)}; \\ Q(s_0) &= (g'(s_0) + 1) \frac{\Lambda^2(s_0)}{f(s_0)}. \end{aligned}$$

Определим начальные условия для уравнений (9), (13). Разложим начальную функцию (6) в ряд по степеням x :

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 + p_1x + O(x^2), \\ p_0 &= p(0), \quad p_1 = p'(0). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя разложения (7), (14) в условие (6) и приравняв слагаемые при одинаковых степенях x , получаем

$$s_0|_{t=t_\Gamma(x)} = p(x). \quad (15)$$

$$s_1|_{t=t_\Gamma(x)} = 0. \quad (16)$$

Интегрируя уравнение (9) с начальным условием (15), находим решение $s_0(x, t)$ в неявном виде:

$$\int_{p(x)}^{s_0} \frac{dS}{\Lambda(S)} = t - t_\Gamma(x). \quad (17)$$

В частности, концентрация осадка на входе фильтра $x = 0$ определяется из соотношения

$$\int_{p(0)}^{s(0,t)} \frac{dS}{\Lambda(S)} = t. \quad (18)$$

Формула (18) задает точное решение на входе фильтра.

Решение задачи (13), (16)

$$s_1 = - \int_{t_\Gamma(x)}^t e^{\int_{t_\Gamma(x)}^\tau P(s_0(x, \tau)) d\tau} Q(s_0(x, \zeta)) d\zeta. \quad (19)$$

Функция c_1 определяется по формуле (12) при известных значениях s_0, s_1 .

Формулы (12), (17), (19) задают старшие члены асимптотики (7) в области Ω_S . Данные разложения удовлетворяют уравнениям (1), (2) и условиям (3), (6) с точностью $O(x^2)$.

Для определения асимптотики подвижной границы Γ раздела двух фаз подставим в подынтегральную функцию (5) разложения (8), (14). Имеем

$$\begin{aligned}\frac{g(p(y))}{f(p(y))} &= \frac{g(p_0) + g'(p_0)p_1y + O(y^2)}{f(p_0) + f'(p_0)p_1y + O(y^2)} = \\ &= \frac{g(p_0)}{f(p_0)} + \frac{\delta p_1 y}{f^2(p_0)} + O(y^2).\end{aligned}$$

Здесь $\delta = g'(p_0)f(p_0) - g(p_0)f'(p_0)$.

Интегрируя, находим

$$t_\Gamma(x) = \frac{g(p_0)}{f(p_0)}x + \frac{\delta p_1 x^2}{2f^2(p_0)} + O(x^3). \quad (20)$$

Обращая формулу (20), получаем обратную зависимость

$$x_\Gamma(t) = \frac{f(p_0)}{g(p_0)}t \left(1 - \frac{\delta p_1 t}{2g^2(p_0)} \right) + O(t^3). \quad (21)$$

Пример. Рассмотрим простую систему (1), (2) с постоянными коэффициентами

$$g(S) = f(S) = 1$$

и линейным коэффициентом фильтрации

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad (22)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (a - bS)C, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (23)$$

Граница Γ является прямой линией $t = x$.

В области Ω_S члены асимптотики задачи (22), (23) с условиями (15), (16) имеют вид

$$s_0(t) = \frac{a - (a - bp(x))e^{-b(t-x)}}{b}; \quad (24)$$

$$c_1(t) = -(a - bp_0)e^{-b(t-x)}; \quad (25)$$

$$s_1(t) = -\frac{(a - bp_0)^2}{b} (1 - e^{-b(t-x)})e^{-b(t-x)}. \quad (26)$$

Асимптотика данной задачи без первоначального осадка построена в [18].

4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ АСИМПТОТИКИ

Расчет асимптотики задачи (22), (23) выполнен при $a = b = 1$; $p_0 = 0.5$; $p_1 = -0.25$. Графики зависимости концентраций взвешенных и осажденных частиц от времени на рис. 1, 2 построены при $x = 0$ (сплошная линия), $x = 0.25$ (прерывистая линия), $x = 0.5$ (пунктир). На рис. 1 горизонтальная линия $S = 1$ отвечает предельному максимальному значению осадка.

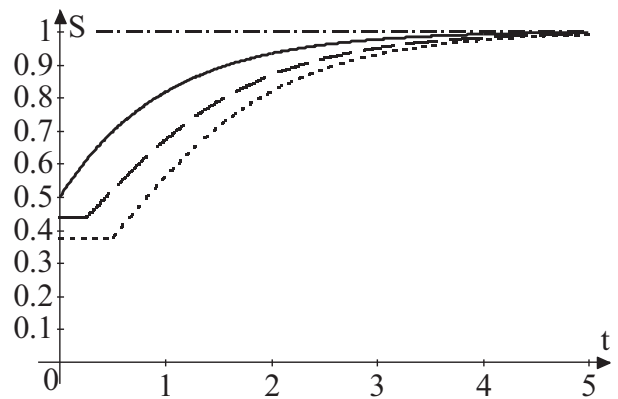


Рисунок 1. Концентрация осадка $S(x_0, t)$.

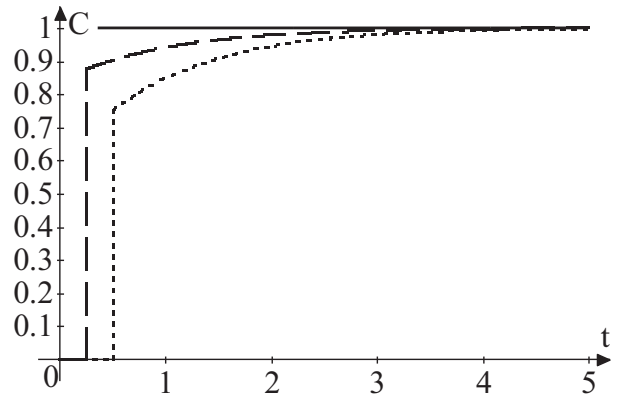


Рисунок 2. Концентрация взвеси $C(x_0, t)$.

На рис. 3, 4 изображены графики зависимости концентраций взвешенных и осажденных частиц от расстояния x до входа фильтра при $t = 0$ (сплошная линия), $t = 0.5$ (прерывистая линия), $t = 1$ (пунктир), $t = 2$ (точка-тире).

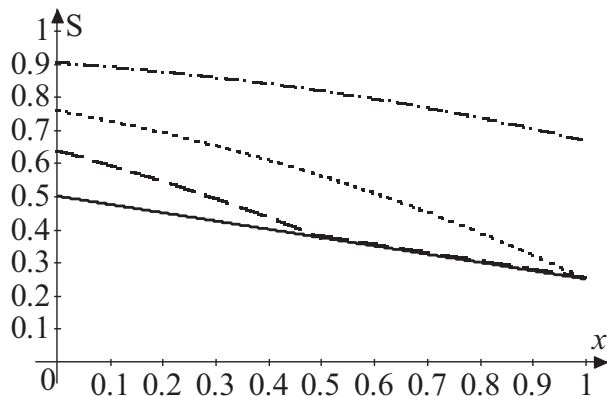


Рисунок 3. Концентрация осадка $S(x, t_0)$.

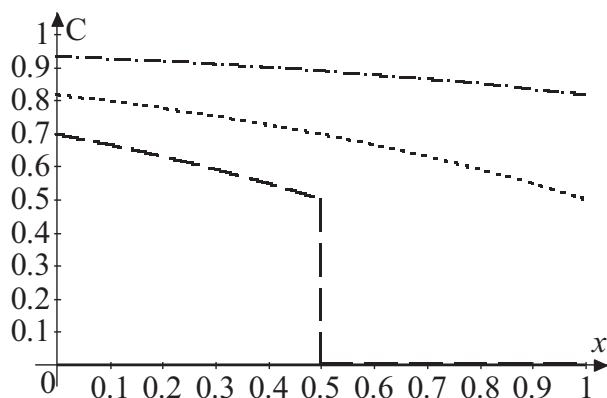


Рисунок 4. Концентрация взвеси $C(x, t_0)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена асимптотика задачи фильтрации суспензии в пористой среде с первоначальным осадком вблизи входа фильтра. На подвижной границе раздела двух фаз концентрация взвешенных частиц имеет разрыв; концентрация осажденных частиц непрерывна и теряет гладкость (рис. 1-4).

В случае блокирующего коэффициента фильтрации $\Lambda(S) > 0$, $0 \leq S < S_{\max}$; $\Lambda(S) = 0$, $S \geq S_{\max}$ при неограниченном увеличении времени t концентрации $C(x, t) \rightarrow C(0, t) = 1$, $S(x, t) \rightarrow S_{\max}$. Для рассматриваемого примера $S_{\max} = a/b = 1$ (см. рис. 1, 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ramachandran V., Fogler H.S.** Plugging by hydrodynamic bridging during flow of stable colloidal particles within cylindrical pores. // Journal of Fluid Mechanics, 385 (1999) 129-156.
2. **Schausberger P., Norazman N., Li H., Chen V., Friedl A.** Simulation of protein ultrafiltration using CFD: Comparison of concentration polarisation and fouling effects with filtration and protein adsorption experiments. // Journal of Membrane Science, 337 (2009) 1-8.
3. **Mays D.C., Hunt J.R.** Hydrodynamic aspects of particle clogging in porous media, Environmental Science and Technology, 39 (2005) 577-584.
4. **Bradford S.A., Torkzaban S., Shapiro A.A.** A theoretical analysis of colloid attachment and straining in chemically heterogeneous porous media, Langmuir, 29 (2013) 6944-6952.
5. **Polyakov Y.S., Zydney A.L.** Ultrafiltration membrane performance: Effects of pore blockage/constriction. // Journal of Membrane Science, 434 (2013) 106-120.
6. **Santos A., Bedrikovetsky P., Fontoura S.** Analytical micro model for size exclusion: Pore blocking and permeability reduction, Journal of Membrane Science, 308 (2008) 115-127.
7. **Bashtani F., Ayatollahi S., Habibi A., Masihi M.** Permeability reduction of membranes during particulate suspension flow; analytical micro model of size exclusion mechanism. // Journal of Membrane Science, 435 (2013) 155-164.
8. **Herzig J.P., Leclerc D.M., Legoff P.** Flow of suspensions through porous media - application to deep filtration. // Industrial and Engineering Chemistry, 62 (1970) 8-35.
9. **Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyagin A.D.** New classes of exact solutions to nonlinear sets of equations in the theory of filtration and convective mass

- transfer. // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 41(5), (2007), 556-564.
10. **You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Exact solution for long-term size exclusion suspension-colloidal transport in porous media, *Abstract and Applied Analysis*, 2013 (2013) 1-9.
11. **Polyanin A.D., Zaitsev V.F.** Handbook of nonlinear partial differential equations, 2nd ed., CRC Press, Hoboken, 2011.
12. **You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Asymptotic model for deep bed filtration. // *Chemical Engineering Journal*, 258, (2014), 374-385.
13. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic model of filtration in almost stationary mode. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 12(1) (2016) 158-163.
14. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic solution for deep bed filtration with small deposit. // *Procedia Engineering*, 111 (2015) 491-494.
15. **Sefrioui N., Ahmadi A., Omari A., Bertin H.** Numerical simulation of retention and release of colloids in porous media at the pore scale. // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 427 (2013) 33-40.
16. **Galaguz Y.P., Safina G.L.** Modeling of Particle Filtration in a Porous Medium with Changing Flow Direction. // *Procedia Engineering*, 153 (2016) 157-161.
17. **Galaguz Y.P., Safina G.L.** Modeling of fine migration in a porous medium. // *MATEC Web of Conferences*, 86 (2016) 03003.
18. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Particle transportation at the filter inlet. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 10(3) (2014) 17-21.

верситет «Высшая школа экономики»; 101000, Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, тел. +7(495) 77295 90 *15219; E-mail: lkuzmina@hse.ru;

Осипов Юрий Викторович, доцент, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499)1835994; E-mail: yuri-osipov@mail.ru.

Ludmila I. Kuzmina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research University Higher School of Economics, 101000, Russia, Moscow, Myasnitskaya st., 20; Phone +7(495) 77295 90 * 15219; E-mail: lkuzmina@hse.ru.

Yuri V. Osipov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavskoe Shosse, 26; Phone +7(499)1835994; E-mail: yuri-osipov@mail.ru.

Кузьмина Людмила Ивановна, доцент, кандидат физико-математических наук, Департамент прикладной математики, Национальный исследовательский уни-