

MODE D'EMPLOI DE LA THÉORIE CONSTRUCTIVE DES CHAMPS BOSONIQUES

avec une application aux chemins rugueux

JÉRÉMIE UNTERBERGER

*Institut Elie Cartan, Université Henri, Poincaré,
BP 239, 54506 Vandoeuvre-les-Nancy cedex, France
jeremie.unterberger@iecn.u-nancy.fr*

Received 22 February 2011

Revised 30 October 2011

Published 23 April 2012

Nous développons dans cet article les principaux arguments constructifs utilisés en théorie quantique des champs, en nous cantonnant aux théories bosoniques, pour lesquelles il n'existe pas de présentation générale récente. L'article s'adresse d'abord et avant tout à des mathématiciens ou physiciens mathématiciens connaissant les arguments de base de la théorie perturbative des champs, et souhaitant connaître un cadre général dans lequel ils peuvent être rendus rigoureux. Il fournit également un aperçu d'une série d'articles récents [50, 51] visant à donner une définition constructive des chemins rugueux et du calcul stochastique fractionnaire.

We develop in this article the principal constructive arguments used in quantum field theory, limiting us to bosonic theories, for which there does not exist any recent general presentation. The article is primarily written for mathematicians or mathematical physicists knowing the basic arguments of quantum field theory, and desiring to discover a general framework in which they can be made rigorous. It also provides a glimpse of a recent series of articles [50, 51] whose aim is to give a constructive definition of rough paths and fractionary stochastic calculus.

Keywords: Constructive field theory; renormalization; cluster expansions; fractionary Brownian motion; fractionary stochastic calculus; rough paths.

AMS Subject Classification: 60F05, 60G15, 60G18, 60H05, 81T08, 81T18

0. Introduction

Cet article est né d'un exposé inachevé, fait au séminaire de physique mathématique de l'Université de Lyon en février 2011. L'auteur de ces lignes voulait raconter brièvement ses travaux récents sur les chemins rugueux et sur le calcul stochastique fractionnaire [50, 51], avant d'en venir à l'objet essentiel de sa conférence – celui pour lequel il avait été mandaté, pourrait-on dire –, à savoir des explications détaillées concernant les méthodes constructives en théorie des champs, sur lesquelles reposent

de manière essentielle ses résultats - ainsi que, plus généralement, la validité des calculs perturbatifs tournant autour de la renormalisation. De fil en aiguille, d'explication en explication, et faute de combattants (pourtant très patients!) l'exposé a dû s'interrompre au bout de presque trois heures.

Les *méthodes constructives* sont en général méconnues du grand public (intéressé à la théorie des champs sous ses divers aspects, s'entend), et réputées réservées à une poignée d'experts. Il y a là un paradoxe, compte tenu du succès extraordinaire de la théorie des champs et des théories de renormalisation. Celles-ci sont devenues incontournables en physique des particules de haute énergie comme en physique de la matière condensée, depuis les travaux de K. Wilson dans les années 70. Parallèlement, le champ de leurs applications mathématiques n'a cessé de s'étendre ces vingt dernières années; on pourrait citer, en suivant approximativement l'ordre chronologique, les invariants de Donaldson pour les variétés de dimension 4 et la théorie de Seiberg–Witten [55]; les intégrales matricielles et leurs applications à la combinatoire [41]; la théorie des noeuds et la topologie en basse dimension [5]; la quantification par déformation des variétés de Poisson par M. Kontsevich [39]; la démonstration constructive du théorème de Kolmogorov–Arnold–Moser (KAM) [26, 9]; les travaux fondateurs d'A. Connes et D. Kreimer portant sur la reformulation algébrique de l'algorithme de renormalisation de Bogolioubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann (BPHZ), à l'origine d'une multitude de développements plus formels, avec des applications notamment aux schémas numériques d'intégration des équations différentielles [14, 10]; et bien d'autres encore.

Des raisons existent à cela, de bonnes et de mauvaises. Passons sur le fait que les applications d'essence combinatoire ou formelle – en somme, la majorité des applications aux mathématiques, lorsqu'on laisse de côté l'analyse et les probabilités – ne s'intéressent par définition qu'aux développements asymptotiques, sans se soucier de leur convergence. La principale et plus sérieuse est sans doute la limitation (qu'on peut espérer provisoire!) du champ d'application des méthodes constructives aux théories qui sont des perturbations de théories gaussiennes. Les théories physiques sous-jacentes s'écrivent en termes d'un lagrangien d'interaction \mathcal{L}_{int} couplé à un paramètre $\lambda > 0$, appelé constante de couplage; la théorie est gaussienne à la limite $\lambda = 0$. Comme nous l'expliquons plus loin (cf. Secs. 1 et 2), la renormalisation (perturbative comme constructive) repose sur une intégration successive sur les degrés de liberté de la théorie, en commençant par les échelles d'énergies (ou moments de Fourier) les plus hautes (ce que les physiciens appellent la zone *ultra-violette*) et en descendant jusqu'aux énergies les plus basses (dans l'*infra-rouge*). Ce faisant, les paramètres de la théorie, notamment λ , sont renormalisés, et deviennent dépendants de l'échelle. La théorie effective à l'échelle j , donnant le comportement des fonctions à n points $\langle \psi(x_1) \cdots \psi(x_n) \rangle$, avec $\log|x_i - x_{i'}| \simeq -j$,^a se calcule alors

^aOu encore (notant ψ^j les fluctuations gaussiennes du champ ψ sur une distance typique de l'ordre de 2^{-j}), des fonctions $\langle \psi^j(x_1) \cdots \psi^j(x_n) \rangle$, sans restriction sur les x_i .

comme une perturbation finie de la théorie gaussienne avec les paramètres effectifs à l'échelle j . Tout le problème de la renormalisation provient de ce que le flot du groupe de renormalisation associé (sauf dans les théories dites *asymptotiquement libres* pour lesquelles la constante de couplage effective tend vers 0,^b et dans certaines théories avec des symétries particulières pour lesquelles le flot est trivial [61]) fait croître le paramètre λ au-delà de la zone où les perturbations sont permises. Dans certains cas,^c des développements perturbatifs en diagrammes de Feynman à 2 ou 3 boucles (au-delà l'utilisation de l'ordinateur devient indispensable) semblent indiquer l'existence d'un *point fixe non trivial*, autrement dit d'une valeur limite *non nulle* du paramètre λ renormalisé aux énergies les plus basses, signature d'un comportement effectif non gaussien de la théorie à l'échelle macroscopique. Dans d'autres, de manière encore plus critique – comme l'électrodynamique quantique en dimension 4, supposée décrire l'interaction des électrons avec le champ électromagnétique, autrement dit de la lumière et de la matière –, ces mêmes développements perturbatifs en diagrammes de Feynmann suggèrent que la constante de couplage effective croît sans limite dans la limite ultra-violette, et donc que le modèle est intrinsèquement mal défini aux énergies les plus hautes. Malheureusement ces modèles sont parmi les plus fondamentaux en physique de la matière condensée comme en physique des particules de haute énergie. La majorité des physiciens s'est donc tournée vers la recherche de nouveaux modèles (comme la grande unification ou la théorie des cordes), ou des modèles intégrables (comme c'est le cas du modèle d'Ising et de nombre d'autres modèles de physique statistique en dimension 2), ou encore a abandonné l'idée de développements perturbatifs rigoureux, se contentant de développements perturbatifs en diagrammes de Feynman.

Un point de terminologie important s'impose ici avant de poursuivre: on appelle d'ordinaire *théorie perturbative des champs* un développement en diagrammes de Feynman. Le développement asymptotique général de la fonction de partition ou des fonctions à n points ou corrélations de la théorie fait apparaître une série entière en λ ou en \hbar , notoirement divergente, dans toutes les théories connues; plus précisément, le coefficient de λ^n , ou somme des diagrammes de Feynman à N boucles*, diverge comme une *factorielle* $N!$ à une certaine puissance. Pourtant, les modèles explorés en *théorie constructive des champs* sont également *perturbatifs* à leur manière, puisqu'ils ne sont bien définis – comme nous venons de l'expliquer – que lorsque les paramètres renormalisés restent *petits* à toutes les échelles. La clé réside dans un développement perturbatif contrôlé – une sorte de développement de Taylor avec reste intégral, au lieu d'un développement en série – permettant d'exprimer la fonction de partition, ou plutôt son logarithme, l'énergie libre, comme

^bLa chromodynamique quantique est asymptotiquement libre dans l'ultra-violet [43]; au contraire, le modèle ϕ^4 non massif en dimension 4 étudié ici est asymptotiquement libre dans l'infra-rouge.

^cOn peut citer la théorie ϕ^4 non massive en dimension 2 et 3, associé au modèle d'Ising à la température critique.

la limite d'une série de fonctions f_j analytiques en λ , $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j(\lambda)$ portant sur les échelles d'énergies, de l'ultra-violet ($j = +\infty$) jusqu'à l'infra-rouge ($j = -\infty$). Formellement, le développement en série (divergent à nouveau) des $f_j(\lambda)$ permet de retrouver la série des diagrammes de Feynman; les développements perturbatifs de la théorie constructive peuvent donc se voir comme une resommation partielle astucieuse de cette même série. La correspondance entre la série divergente des diagrammes de Feynman et la série convergente de la théorie constructive est en fait plus précise que cela. L'énergie libre est typiquement analytique à l'intérieur d'un petit disque $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - \lambda_0| < \lambda_0\}$ ($\lambda_0 > 0$) inclu dans le demi-plan $\text{Re } \lambda > 0$, et des estimées permettent de montrer qu'elle est égale à la somme de Borel de son développement en série en 0, donné par les diagrammes de Feynman.

Après ces précautions d'usage, nous pouvons maintenant tenter de résumer les succès à porter au crédit de la théorie constructive; on pourra se reporter à la monographie de V. Rivasseau [60], à la thèse de A. Abdesselam [1], ou aux livres de V. Mastropietro et de M. Salmhofer [53, 63] (qui s'intéressent plus spécifiquement aux théories fermioniques). La théorie constructive des champs est un programme lancé à l'origine dans les années 60 par A. S. Wightman [72], dont le but était de donner des exemples explicites de théories des champs avec une interaction non triviale; cf. [29] et les références données dans l'article pour une bibliographie plus étendue. E. Nelson donna la première contribution au programme en 1965 en introduisant une analyse multi-échelles [56] afin de contrôler la divergence du modèle ϕ^4 en deux dimensions, dont la seule divergence provient de l'ordre de Wick. J. Glimm et A. Jaffe introduisirent l'analyse générale sur l'espace des phases [30] pour des modèles avec un nombre fini de graphes divergents. Le développement en clusters fut inventé par J. Glimm, A. Jaffe et T. Spencer [31] pour contrôler la limite en volume infini.

L'école romaine [6] se rendit alors compte que cette analyse de l'espace des phases était en un certain sens une version spatiale continue du *développement en blocs de spins* ou *block-spin expansion*, écrite en premier par Kadanoff pour le modèle d'Ising, et devenue ultérieurement un outil majeur à la fois en physique des particules de haute énergie et en physique statistique grâce aux travaux de K. Wilson sur le *groupe de renormalisation* [73, 74]. L'outil du développement multi-échelles fut développé dans les années 80 afin de donner une version rigoureuse de groupe de renormalisation de Wilson, en introduisant notamment le flot des paramètres effectifs (ou renormalisés), cf. [28] pour l'approche à la façon blocs de spins, et [22] pour la version continue appelée *développement en clusters multi-échelle* ou *multi-scale cluster expansion*.

Cette dernière approche a été poursuivie durant les trente dernières années, conduisant à la fois à des avancées conceptuelles [1–3, 49], et à des applications à des modèles de la théorie quantique des champs avec un comportement asymptotique non trivial soit dans la limite *ultra-violette* (ou des hautes énergies, ou encore à petite distance) ou *infra-rouge* (ou des basses énergies, ou à grande distance); on peut citer

pèle mêle le modèle ϕ^4 , l' électrodynamique ou la chromodynamique quantique, les modèles de physique statistique sur réseau, les marches aléatoires auto-évitant [54]... D'autres régimes avec une singularité non plus ponctuelle (dans la limite $|\xi| \rightarrow \infty$ en moments de Fourier), mais au voisinage d'une *surface* interprétée comme surface de Fermi, ont également été étudiés, avec des applications à la localisation d' Anderson et à des modèles de fermions non-relativistes en interaction, tels que le modèle de Luttinger [7] en dimension un ou le modèle du jellium en dimension deux [23], en relation avec la théorie de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) sur la supraconductivité. En général, les théories fermioniques peuvent être traitées sans introduire tout le lourd appareillage des développements en clusters multi-échelles [4]. Malgré les avancées conceptuelles de la dernière décennie, l'avis (personnel) de l'auteur est que le cadre général pour ces développements en clusters, tel qu'on le trouve dans l'article [22] écrit il y a plus de vingt ans, était le plus approprié, à la fois par sa généralité, et son usage parcimonieux d'identités combinatoires et d'algèbre, au profit de développements en arbres somme toute intuitifs et faciles à visualiser, dans lesquels apparaissent clairement les idées essentielles. Le défaut majeur (mais partagé dans une large mesure par les autres approches) est la technicité assez redoutable des bornes finales; celle-ci n'est pas apparente dans l'article – bien qu'il contienne tous les arguments majeurs –, mais réelle. Nous espérons que cet article peut servir de compagnon à l'article [51], dans lequel le lecteur pourra trouver tous les détails dans une présentation nouvelle.

Présentons maintenant brièvement le long chemin qui, partant de problèmes fondamentaux concernant la définition même du calcul stochastique fractionnaire, nous a conduits à chercher des réponses en théorie des champs – et plus précisément en théorie *constructive* des champs, puisqu'il s'agit ici d'analyse et de probabilités.

L'étude des équations différentielles stochastiques dirigées par le brownien (ou, via la formule d'Itô ou celle de Feynman-Kac, des équations de diffusion) est un des thèmes essentiels de la théorie des probabilités, depuis les premiers travaux d'Einstein et Smoluchowski. L'intérêt porté à cette théorie tient à ce qu'elle se confond dans une large mesure avec celle des processus de Markov continus. L'outil technique essentiel pour le calcul stochastique est la théorie des (semi-)martingales, qui repose elle-même sur le caractère Markovien du processus, ainsi que sur la notion de *variation quadratique* des trajectoires, finie lorsque celles-ci sont de régularité Hölder d'indice $\geq 1/2$. Il est bien connu que deux théories d'intégration (celle d'Itô et celle de Stratonovich) sont en concurrence. Celle de Stratonovich est sans doute celle qui correspond le plus à l'intuition, puisqu'elle s'obtient comme limite de l'intégrale de Riemann usuelle contre de bonnes approximations C^1 par morceaux des trajectoires browniennes (notamment les classiques interpolations linéaires par morceaux), et qu'elle vérifie la formule fondamentale du calcul infinitésimal, à savoir $F(B(t)) = F(B(s)) + \int_s^t F'(B(u)) d^{\text{Strato}} B(u)$ pour toute fonction régulière F évaluée le long d'une trajectoire brownienne $B(t)$ (cf. [75], cité dans [38], §5.2 D).

Cette approche échoue lorsqu'on considère des processus stochastiques d'indice de régularité Hölder $\alpha < 1/2$.^d Le champ d'applications est immense et mal défini, allant des diffusions sur des fractals [35] aux sous-diffusions en milieu poreux [32, 42], des processus multi-fractionnaires (et leurs proches parents, les marches aléatoires multi-fractales ou martingales multiplicatives [12] avec leurs applications en gravité quantique de Liouville [16] ou pour modéliser la turbulence [24, 18, 40]) aux *bruits colorés*, utilisés de manière phénoménologique dans nombre d'applications, en particulier en synthèse d'images. Ce sont ces derniers qui nous intéresseront ici, en raison de leur caractère gaussien qui les apparente aux modèles usuels de la théorie quantique des champs. L'exemple le plus élémentaire de ces processus gaussiens est appelé habituellement *brownien fractionnaire*^e par les probabilistes; il s'agit en fait d'une famille de processus indexée par un paramètre α correspondant à l'indice de régularité Hölder des trajectoires [58, 57]. Or les travaux de L. Coutin et Z. Qian [15] ont montré que l'intégrale stochastique non triviale la plus élémentaire construite à partir du brownien fractionnaire bidimensionnel $\phi = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ – avec ses deux composantes indépendantes et de même loi –, à savoir

$$\mathcal{A}(s, t) := \int_s^t d\phi_1(t_1) \int_s^{t_1} d\phi_2(t_2) = \int_s^t (\phi_2(u) - \phi_2(s)) d\phi_1(u), \quad (0.1)$$

une intégrale itérée d'ordre 2, définie comme limite des intégrales itérées des interpolations linéaires par morceaux des trajectoires, *diverge* quand $\alpha \leq 1/4$. Des travaux ultérieurs reposant sur des méthodes différentes [15, 57, 65, 66] ont confirmé l'existence de cette barrière apparemment infranchissable en $\alpha = 1/4$.

Et pourtant, la théorie des *chemins rugueux*^{*} (ou *rough paths*), une théorie d'intégration adaptée aux chemins irréguliers, introduite par T. Lyons à la fin des années 90 [46, 47] et devenue un outil essentiel en calcul stochastique [46, 47, 33, 44, 45, 25], prédit – malheureusement par des arguments géométriques non constructifs – l'existence d'approximations C^1 par morceaux, autres que l'interpolation linéaire par morceaux, dont les intégrales itérées de tous ordres convergent vers des quantités finies s'interprétant comme *substituts d'intégrales itérées du brownien fractionnaire* – en termes plus géométriques, comme *chemin rugueux* au-dessus du brownien –. Nous insistons sur l'idée qu'il s'agit de substituts: A. Lejay [44, 45] a bien fait voir comment on peut modifier à loisir les intégrales itérées d'un chemin en insérant tout le long des “bulles” microscopiques invisibles à l'oeil nu. Les travaux de l'auteur [67–70, 50, 51] ont montré en fait que lesdites intégrales itérées s'expriment en termes de champs singuliers (dits *ordonnés en Fourier*) qui peuvent être régularisés par l'ajout d'un terme d'interaction dans le lagrangien, sans modifier les trajectoires du champ régulier ϕ sous-jacent. Ce miracle s'explique par le

^dRappelons qu'un chemin continu $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est α -Hölder, $\alpha \in (0, 1)$, si $\sup_{s, t \in [0, T]} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\alpha} < \infty$. Les trajectoires Browniennes sont α -Hölder pour tout $\alpha < 1/2$; elles ont une variation quadratique finie presque sûrement en raison de compensations aléatoires.

^eIls s'obtiennent en effet comme dérivée ou intégrale fractionnaire – suivant la valeur de α – du Brownien.

flot quasi-trivial du groupe de renormalisation, une itération suffisant pour écranter totalement l'interaction. On obtient ainsi toute une classe de processus gaussiens “généralisés” qu'on pourrait appeler *champs quasi-gaussiens*. La théorie générale [19] donne une multitude d'intégrales itérées possibles correspondant à des choix essentiellement arbitraires de champs singuliers; la construction physique, quant à elle, donne une famille à un paramètre d'intégrales itérées construites par un procédé naturel en théorie des champs, pouvant de plus s'interpréter comme ajout d'une dérive (drift) singulière dans une équation différentielle stochastique [52], et permettant de définir une intégration stochastique avec de bonnes propriétés, adaptée par exemple à la résolution d'équations différentielles stochastiques.

Les termes français suivis d'une astérisque (*) sont retraduits en anglais dans le lexique final, afin de permettre au lecteur anglophone de comprendre aisément, et au lecteur francophone de se référer aux articles originaux. La théorie constructive n'ayant jamais été écrite en français, leur traduction française a été obtenue en suivant les traditions orales, pour lesquelles l'auteur remercie chaleureusement Jacques Magnen, sans qui – plus généralement – tout ce travail de transcription de la théorie constructive n'aurait pas été possible.

1. Comptage de Puissance Pour les Diagrammes de Feynman Multi-échelles

Curieusement, les traités classiques sur la théorie quantique des champs (qu'ils introduisent l'algorithme de Bogoliubov–Parasiuk–Hepp–Zimmermann ou qu'ils en restent à des développements à 1 ou 2 boucles*) n'utilisent pas la notion du *comptage de puissance**, ni de *diagramme de Feynman multi-échelles**. C'est pourtant (et les spécialistes le savent bien depuis longtemps [20, 21, 27]) de loin le moyen le plus simple de montrer qu'on peut renormaliser les diagrammes de Feynman de façon à produire des quantités finies, et aussi de borner ces diagrammes. Nous renvoyons ici au livre de V. Rivasseau [60], ou à la thèse récente de F. Vignes-Tourneret [71] où ces estimées classiques sont redémontrées en détails de manière très pédagogique.

Le point de départ est une théorie gaussienne. Soit donc $\psi : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ gaussien stationnaire sur \mathbb{R}^D à d composantes, de noyau de covariance $C_\psi(x, y) = C_\psi(x - y)$. Dans toute la suite on choisit une décomposition en échelles M -adique du champ, où M est une constante > 1 fixée.

Définition 1.1. (1) Soit $\chi^1 : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ≥ 0 à support compact telle que $\chi^1 \equiv 0$ dans un voisinage de 0 et $\chi^1 \equiv 1$ dans un voisinage du bord de l'hypercube défini par $\sup_{j=1, \dots, D} |\xi_j| = 1$. Cette fonction peut être choisie de sorte que $(\chi^j)_{j \in \mathbb{Z}}$, avec $\chi^j := \chi^1(M^{-j} \cdot)$, définissent une partition de l'unité, i.e. $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi^j \equiv 1$. Soit $\rho \in \mathbb{Z}$. Alors la *troncature* ultra-violet* à l'échelle ρ d'une fonction $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^d$ est $f \rightarrow^\rho := \mathcal{F}^{-1}(\xi \mapsto [\sum_{j \leq \rho} \chi^j(\xi)] \mathcal{F}f(\xi))$, où \mathcal{F} désigne la transformation de Fourier. En termes simples, la troncature ultra-violet “coupe” toutes les composantes Fourier de moment ξ tel que $|\xi| \gg M^\rho$.

(2) Posons $C_\psi^j := \mathcal{F}^{-1}(\xi \mapsto \chi^j(\xi) \mathcal{F}C_\phi(\xi))$. Alors ψ a la même loi que la série de champs gaussiens indépendants $\sum_j \psi^j$, si ψ^j a pour covariance C_ψ^j . La troncature* ultra-violet d'échelle ρ du champ ψ est $\psi^{\rightarrow\rho} := \sum_{j \leq \rho} \psi^j$, de covariance $C_\psi^{\rightarrow\rho} := \sum_{j \leq \rho} C_\psi^j$.

Le cas typique est celui d'un *champ gaussien multi-échelles de dimension β* , pour lequel $|\mathcal{F}C_\psi(\xi)| \approx \frac{1}{|\xi|^{D-2\beta}}$ et $|\langle \psi^j(x) \psi^j(y) \rangle| \leq C_r \frac{M^{2\beta j}}{(1+M^j|x-y|)^r}$ pour tout $r \geq 1$ (les exposants $-(D-2\beta)$ et -2β se correspondant par transformation de Fourier), cf. [50]. La définition de la dimension β suit la définition usuelle des physiciens, en ce sens que $\psi(x)$ se comporte comme une énergie (ou inverse de distance) à la puissance β .^f En particulier, les champs de dimension d'échelle $\beta > 0$ sont divergents dans l'ultra-violet.

Définition 1.2. (champs en interaction) Soit $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{C}^q$ un ensemble de paramètres, et P_1, \dots, P_q ($q \geq 1$) des polynômes homogènes sur $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^D$. Alors la *théorie en interaction avec lagrangien d'interaction* $\mathcal{L}_{\text{int}}(\psi)(x) := \sum_{p=1}^q \lambda_p P_p(\psi(x); \nabla \psi(x))$ est (si elle existe!) la limite faible $\mathbb{P}_\lambda(d\psi)$ des mesures de Gibbs

$$\mathbb{P}_{\lambda, V, \rho}(d\psi) := \frac{1}{Z_{\lambda, V, \rho}} e^{-\int_V \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi^{\rightarrow\rho})(x) dx} d\mu^{\rightarrow\rho}(\psi|_V), \quad (1.1)$$

quand le volume $|V|$ et l'échelle de cut-off ultra-violet ρ tendent vers l'infini, où: $V \subset \mathbb{R}^D$ est compact; $d\mu^{\rightarrow\rho}(\psi|_V)$ est la mesure gaussienne correspondant au champ régularisé $\psi^{\rightarrow\rho}$ restreint au volume fini V ; $Z_{\lambda, V, \rho}$ est une constante de normalisation appelée *fonction de partition*.

En développant l'exponentielle de l'interaction en série, et en utilisant la formule de Wick bien connue (rappelée en §3.2), on peut exprimer les fonctions à n points (ou corrélations) de la théorie, $\langle \psi_{i_1}(x_1), \dots, \psi_{i_n}(x_n) \rangle_\lambda$, comme une somme formelle de diagrammes de Feynman, $\frac{1}{Z_\lambda} \sum_\Gamma A(\Gamma)$, où Γ parcourt l'ensemble des diagrammes avec n lignes externes $\psi_{i_1}(x_1), \dots, \psi_{i_n}(x_n)$, et $A(\Gamma) \in \mathbb{C}$ est l'évaluation du diagramme correspondant; les fonctions à n points *connexes* s'obtiennent alors comme somme sur les diagrammes *connexes*, sans la constante de renormalisation $\frac{1}{Z_\lambda}$. Si l'on choisit une échelle pour chaque ligne (intérieure ou extérieure) du graphe, on obtient ce qu'on peut appeler un *diagramme de Feynman multi-échelles*.

Dans toute la suite on supposera pour simplifier le comptage de puissances que la théorie est *juste renormalisable*; autrement dit, les constantes de couplage λ_i sont sans dimension, ou encore, chaque terme dans l'interaction $\int_{\mathbb{R}^D} \psi_{i_1}(x), \dots, \psi_{i_l}(x) dx$ est de dimension $\beta_{i_1} + \dots + \beta_{i_l} - D = 0$. On démontre alors facilement qu'un diagramme mono-échelle Γ dont toutes les lignes intérieures et extérieures sont d'une même échelle fixée j est d'ordre $M^{j\omega(\Gamma)}$, où $\omega(\Gamma) := D - \sum_{\ell \in L_{\text{ext}}(\Gamma)} \beta_{i_\ell}$ ($L_{\text{ext}}(\Gamma)$

^fLa convention dans [50] est d'appeler dimension d'échelle* $-\beta$, égal à la régularité Hölder des trajectoires.

désignant l'ensemble des lignes externes) est le *degré de divergence superficielle* du graphe. Pour la théorie ϕ^4 en 4 dimensions par exemple, le champ ϕ est de dimension $\beta = \frac{D}{2} - 1 = 1$, et le degré de divergence superficielle d'un graphe connexe à n lignes externes est $4 - n$ (cf. [43], §6.1.2). Un diagramme mono-échelle est bien entendu convergent. Les divergences en théorie quantique des champs proviennent des *diagrammes quasi-locaux*, c'est-à-dire des diagrammes multi-échelles Γ dont les lignes internes sont toutes de plus haute énergie que les lignes externes; on note i_Γ l'échelle *minimum* des lignes *internes*, et e_Γ l'échelle *maximum* des lignes *externes*, de sorte que la *hauteur** $ht_\Gamma := i_\Gamma - e_\Gamma$ d'un diagramme quasi-local Γ est positive. En raison de la décroissance polynomiale ou exponentielle “scalée” de la covariance $C^j(x - y) = \langle \psi^j(x) \psi^j(y) \rangle$, négligeable sur des distances $|x - y| \gg M^{-j}$, l'ordre de grandeur de l'évaluation $A(\Gamma)$ d'un diagramme quasi-local s'obtient en intégrant sur des vertex intérieurs à distance $\lesssim M^{-i_\Gamma}$ les uns des autres, inférieure à la distance *a priori* comparable à M^{-e_Γ} des vertex extérieurs, d'où le nom “quasi-local”. Dans la terminologie de [60, 71], les diagrammes quasi-locaux *divergents* sont dits *diagrammes dangereux*.[§] Pour évaluer un diagramme multi-échelles, on réalise une sorte d’“écorché” : pour chaque échelle j des lignes du diagramme, on dessine l'ensemble des lignes d'échelle $\geq j$, noté $\Gamma^{j \rightarrow}$. Soit $j_J > j_{J-1} > \dots$ la liste décroissante des échelles du diagramme. On construit un arbre couvrant de Γ en extrayant du graphe $G^{j_J \rightarrow}$ un arbre couvrant, puis en le complétant en un arbre couvrant de $G^{j_{J-1} \rightarrow}$, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des échelles. On intègre successivement sur les sommets de l'arbre couvrant en partant des échelles les plus hautes. La décroissance “scalée” des propagateurs montre que chaque vertex contribue un facteur de l'ordre de 1 (pour une théorie juste renormalisable bien entendu). En intégrant sur tous les sommets (sauf un) d'un diagramme quasi-local connexe $g \subset G^{j_i \rightarrow}$, on trouve une contribution totale majorée par $M^{i_g \omega(g)} = M^{ht_g \omega(g)} M^{e_g \omega(g)}$. Si tous les degrés de divergence superficiels $\omega(g)$ de tous les sous-diagrammes quasi-locaux sont < 0 , les *facteurs de ressort** $M^{ht_g \omega(g)}$ permettent de sommer sur les différences d'échelle $j_i - j_{i-1}$, alors que les termes $M^{e_g \omega(g)}$ sont gardés en réserve pour les échelles inférieures et garantissent que les vertex des diagrammes quasi-locaux d'échelle e_g sont encore neutres. La *renormalisation* consiste à soustraire l'évaluation des sous-diagrammes quasi-locaux superficiellement divergents à moments externes nuls (ou mieux encore son développement de Taylor à l'ordre τ autour des moments externes nuls), ce qui est équivalent à déplacer toutes les lignes externes au même point. Le graphe étant quasi-local, c'est-à-dire *quasi-ponctuel* du point de vue de l'échelle de ses lignes externes, on comprend que cette opération donne la contribution principale du graphe. La soustraction est équivalente du point de vue du comptage de puissance à remplacer $\omega(\Gamma^{j_i \rightarrow})$ par $\omega^*(\Gamma^{j_i \rightarrow}) := \omega(\Gamma^{j_i \rightarrow}) - \tau - 1$. Pour τ

[§]La formule des arbres de Zimmermann (ou algorithme de renormalisation de BPHZ) se réécrit dans ce langage multi-échelles, faisant apparaître essentiellement des soustractions de contre-terms associés à des forêts de diagrammes dangereux, et rendant quasi-immédiate la preuve de la finitude des graphes renormalisés (cf. [71], §1.3.3).

suffisamment grand ($\tau = 2$ pour la théorie ϕ^4 en dimension 4, $\tau = 0$ pour le modèle de chemins rugueux), $\omega^*(\Gamma^{j_i \rightarrow}) < 0$, ce qui permet de sommer sur les échelles.

2. Développement en Clusters

Les développements en clusters* proviennent de l'étude de modèles sur réseau ou de gaz dilués à haute température [37, 62]. Dans tous les cas, l'idée est d'évaluer une fonction de partition portant sur un grand nombre de degrés de liberté couplés avec une interaction à courte portée en la réécrivant comme somme sur des amas finis ("clusters") entièrement découplés. Les développements en clusters de la théorie des champs sont fondées sur une décomposition en ondelettes simplifiée ($\psi_{\Delta_j}^j$) d'un champ gaussien ψ , où j est une échelle de Fourier *verticale* comme précédemment, et Δ^j un cube *horizontal* (i.e. relatif à l'espace direct \mathbb{R}^D et non à l'espace de Fourier) de taille M^{-j} autour du centre de la composante ondelette. Chaque $\psi_{\Delta_j}^j$ peut être vu comme un *degré de liberté** de la théorie, ces différents degrés de liberté étant relativement indépendants les uns des autres, de sorte que l'interaction intégrée $\int \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi)(x)dx$ peut se réécrire comme une double série horizontale et verticale, divergente horizontalement (en raison de l'invariance par translation de la théorie) et verticalement (sauf si la théorie ne nécessite pas de renormalisation). Les développements en clusters horizontaux (H) et verticaux (V) permettent de réécrire la fonction de partition $Z_V^{\rightarrow\rho}$ sur un volume fini, avec échelle de troncature ultra-violette ρ , comme une somme,

$$Z_V^{\rightarrow\rho} = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n \text{ non-overlapping}} F_{HV}(\mathbb{P}_1) \cdots F_{HV}(\mathbb{P}_n), \quad (2.1)$$

où:

– $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ sont des *polymères* disjoints, i.e. des ensembles de cubes Δ reliés par des liens horizontaux et verticaux; pendant les développements en clusters, la mesure gaussienne a été modifiée de sorte que les composantes des champs appartenant à des polymères différents sont devenues indépendantes;

– $F_{HV}(\mathbb{P})$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ est l'évaluation $\langle f_{HV}(\mathbb{P}) \rangle_\lambda$ d'une fonction f_{HV} dépendant uniquement des composantes situées dans le support de \mathbb{P} .

Les faits fondamentaux sont les suivants: (i) la *fonction d'évaluation du polymère** $F_{HV}(\mathbb{P})$ est d'autant plus petite que le polymère est grand, en raison de la décroissance polynomiale ou exponentielle à grandes distances (pour la direction horizontale), et par des arguments de comptage de puissance pour la direction verticale, ce qui conduit à l'image d'îlots horizontaux* maintenus ensemble par des *ressorts** verticaux; (ii) les liens horizontaux et verticaux dans \mathbb{P} (une fois qu'un cube appartenant à \mathbb{P} a été fixé) suppriment l'invariance par translation, responsable de la divergence lorsque $|V| \rightarrow \infty$. Une astuce combinatoire classique, appelée *développement de Mayer* (un développement en clusters d'un type particulier en fait) permet de réécrire l'Éq. (2.1) comme une somme similaire sur des *arbres de polymères**, parfois appelés *Mayer-extended polymers* (polymères

étendus à la Mayer?) et notés \mathbb{P} eux aussi par abus de notation, mais sans contrainte de non-overlap, $Z_V^{-\rho} = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n} F(\mathbb{P}_1) \cdots F(\mathbb{P}_n)$, où $F = F_{HVM}$ est une nouvelle fonction d'évaluation de polymère tenant compte du développement de Mayer, de sorte que $\log Z_V^{-\rho} = \sum_{\mathbb{P}} F(\mathbb{P})$ apparaît comme une quantité extensive puisqu'invariante par translation. Les choses sont en fait plus compliquées que cela, les considérations précédentes ne valant que pour une échelle donnée. Au total, on trouve que, dans la limite $|V|, \rho \rightarrow \infty$, l'énergie libre $\log Z_V^{-\rho}$ est une somme sur chaque échelle de quantités extensives dépendant de l'échelle considérée, i.e. $\log Z_V^{-\rho} = |V| \sum_{j \leq \rho} M^{Dj} f_V^{j \rightarrow \rho}$, où $f_V^{j \rightarrow \rho}$ (qu'on peut voir comme une énergie libre par cube d'échelle j) converge quand $|V| \rightarrow \infty$ vers une quantité finie de l'ordre de $O(\lambda)$. On retrouve l'idée que chaque cube d'échelle j contient un degré de liberté. Alternativement, on peut approcher cette décomposition par une somme $\sum_{j \leq \rho} \int_V f_{\text{vol}}^{j \rightarrow \rho}(x) dx$, où $f_{\text{vol}}^{j \rightarrow \rho}$ est une *densité volumique* d'énergie libre d'échelle j , de l'ordre de M^{Dj} . Finalement, les fonctions à n points se calculent de la même manière en incorporant des champs externes d'une échelle donnée et en sommant sur les échelles de ces champs.

2.1. Formule de Brydges–Kennedy–Abdesslam–Rivasseau

Voyons maintenant comment concrétiser ces idées. La très jolie formule ci-dessous, obtenue dans une première version par Brydges et Kennedy [11] (cf. toutefois [17] pour des versions encore antérieures), puis améliorée et systématisée par A. Abdesselam et V. Rivasseau [2, 3], fascine les mathématiciens [13]. Elle permet de traiter le *développement en clusters horizontal* ainsi que le *développement de Mayer*; dans le premier cas, les *objets* sont des *cubes* d'une échelle donnée, dans le deuxième cas, des *polymères multi-étages*.

Cette formule s'énonce de manière abstraite sur un ensemble fini d'objets \mathcal{O} quelconque. Un lien ℓ de l'ensemble \mathcal{O} est une paire o_ℓ, o'_ℓ d'objets distincts. L'ensemble des liens de \mathcal{O} est noté $L(\mathcal{O})$; on peut le voir comme l'ensemble des arêtes du graphe total sur \mathcal{O} . Si \mathbb{F} est une forêt (autrement dit, une réunion disjointe d'arbres) reliant les objets de l'ensemble \mathcal{O} , on note $L(\mathbb{F}) \subset L(\mathcal{O})$ l'ensemble de ses arêtes.

Définition 2.1. (formule de Brydges–Kennedy–Abdesslam–Rivasseau) Soit $Z_{\mathcal{O}} : [0, 1]^{L(\mathcal{O})} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $Z = Z((z_\ell)_{\ell \in L(\mathcal{O})})$ dépendant d'un ensemble de paramètres $z_\ell \in [0, 1]$ placés sur les liens $\ell = (o_\ell, o'_\ell)$ reliant deux à deux les objets d'un ensemble (abstrait) fini \mathcal{O} . Alors:

(1) (formule BKAR1)

$$Z_{\mathcal{O}}(\mathbf{1}) = \sum_{\mathbb{F} \in \mathcal{F}(\mathcal{O})} \left(\prod_{\ell \in L(\mathbb{F})} \int_0^1 dw_\ell \right) \left(\left(\prod_{\ell \in L(\mathbb{F})} \frac{\partial}{\partial z_\ell} \right) Z \right) (z(\mathbf{w})), \quad (2.2)$$

où: $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ est l'ensemble des forêts non ordonnées reliant les objets de \mathcal{O} ; $z_\ell(\mathbf{w})$, $\ell \in L(\mathcal{O})$ est le minimum des paramètres $w_{\ell'}$ pour ℓ' parcourant l'unique

chemin de o_ℓ vers o'_ℓ si o_ℓ et o'_ℓ sont connectés par les liens de \mathbb{F} , et $z_\ell(\mathbf{w}) = 0$ sinon.

(2) (formule BKAR2)

On suppose $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \amalg \mathcal{O}_2$. Soit $\mathcal{F}_{\text{res}}(\mathcal{O})$ l'ensemble des forêts \mathbb{F} *restreintes** sur \mathcal{O} , c'est-à-dire des forêts dont chaque composante connexe est (i) soit un arbre d'objets de type 1, appelé *arbre non enraciné**; soit (ii) un *arbre enraciné** contenant un seul sommet de type 2, considéré comme sa racine. Alors

$$Z_{\mathcal{O}}(\mathbf{1}) = \sum_{\mathbb{F} \in \mathcal{F}_{\text{res}}(\mathcal{O})} \left(\prod_{\ell \in L(\mathbb{F})} \int_0^1 dw_\ell \right) \left(\left(\prod_{\ell \in L(\mathbb{F})} \frac{\partial}{\partial z_\ell} \right) Z \right) (\mathbf{z}(\mathbf{w})), \quad (2.3)$$

où $z_\ell(\mathbf{w})$, $\ell \in L(\mathcal{O})$ est le minimum des paramètres $w_{\ell'}$ pour ℓ' parcourant l'unique chemin dans $\bar{\mathbb{F}}$ de o_ℓ vers o'_ℓ , $\bar{\mathbb{F}}$ étant la forêt obtenue à partir de \mathbb{F} en fusionnant* toutes les racines de \mathbb{F} en un seul sommet.

En pratique $Z_{\mathcal{O}} := Z_{\mathcal{O}}(\mathbf{1}) = Z_{\mathcal{O}}(1, \dots, 1)$ est une fonctionnelle donnée au départ (dépendant de l'ensemble \mathcal{O} ainsi qu'implicitement de paramètres extérieurs comme des constantes de couplage, des champs extérieurs...), d'une grande complexité combinatoire, c'est-à-dire (sans prétendre à une définition précise) ne pouvant s'obtenir à partir de fonctionnelles sur des sous-ensembles de \mathcal{O} . Dans les deux cas que nous allons voir, il existe une façon naturelle d'associer à $Z_{\mathcal{O}}$ une fonctionnelle $Z_{\mathcal{O}}((z_\ell)_{\ell \in L(\mathcal{O})})$ de sorte que $Z_{\mathcal{O}}(\mathbf{z})$ se factorise sur les composantes connexes du graphe obtenu en supprimant les arêtes ℓ telles que $z_\ell = 0$. Plus précisément, la contribution d'une forêt \mathbb{F} de composantes connexes $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_I$ au membre de droite de (2.2) se réécrit comme le produit

$$\prod_{i=1}^I \left(\prod_{\ell \in L(\mathbb{T}_i)} \int_0^1 dw_\ell \right) \left(\left(\prod_{\ell \in L(\mathbb{T}_i)} \frac{\partial}{\partial z_\ell} \right) Z_{\mathbb{T}_i} \right) (z_\ell((w_{\ell'})_{\ell' \in L(\mathbb{T}_i)}), \ell \in L(\mathbb{T}_i)). \quad (2.4)$$

Le développement restreint (2.3) évite de tester (ou affaiblir) les liens entre deux objets de type 2 lorsque cela est inutile ou dangereux (cf. application au développement de Mayer ci-dessous).

Première application: développement en clusters horizontal

Soit \mathbb{D}^j l'ensemble des cubes Δ^j d'une échelle j donnée. En dimension $D = 1$, il s'agit simplement des intervalles $[iM^{-j}, (i+1)M^{-j}]$, $i \in \mathbb{Z}$. En dimension 2, les carrés Δ^j s'obtiennent comme faces du réseau carré usuel sur \mathbb{Z}^2 , contracté ou dilaté d'un facteur M^{-j} . De manière générale, $\Delta^j = \{x \in \mathbb{R}^D; n_i \leq M^j x_i \leq n_i + 1\}$ pour certains entiers n_1, \dots, n_D . Les différents Δ^j donnent une partition de l'espace \mathbb{R}^D . Les liens ℓ relient deux cubes notés Δ_ℓ et Δ'_ℓ . Si $x \in \mathbb{R}^D$, on note Δ_x^j le cube d'échelle j contenant x .

Considérons la fonction de partition d'un modèle de théorie des champs restreinte à une échelle j donnée,

$$Z^j := \int e^{-\mathcal{L}_{\text{int}}(\psi^j)(x)dx} d\mu(\psi^j). \quad (2.5)$$

A un choix de paramètres d'affaiblissement* z_ℓ donné, notés dans ce cas particulier s_ℓ ou $s_{\Delta_\ell, \Delta'_\ell}$, correspondent un noyau de covariance affaibli $C_s(x, x') := s_{\Delta^j_x, \Delta^j_{x'}} C(x, x')$ et la mesure gaussienne associée μ_s .

Une généralisation en dimension infinie de la formule suivante pour un vecteur gaussien bidimensionnel $X = (X_1, X_2)$ de matrice de covariance $C_s = \begin{pmatrix} C(1, 1) & sC(1, 2) \\ sC(1, 2) & C(2, 2) \end{pmatrix}$, obtenue par transformation de Fourier

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \langle f(X) \rangle_s &= \frac{\partial}{\partial s} \iint f(x) (2\pi \sqrt{\det C_s})^{-1} \exp -\frac{1}{2} (C_s^{-1} x, x) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \iint \hat{f}(\eta) \exp -\frac{1}{2} (C_s \eta, \eta) d\eta \\ &= C(1, 2) \langle \partial_{X_1} \partial_{X_2} F(X) \rangle_s \end{aligned} \quad (2.6)$$

donne la formule suivante:

$$\begin{aligned} Z^j &= \sum_{\mathbb{F}^j \in \mathcal{F}^j} \left[\prod_{\ell \in L(\mathbb{F}^j)} \int_0^1 dw_\ell \int_{\Delta_\ell} dx_\ell \int_{\Delta'_\ell} dx'_\ell C(x_\ell, x'_\ell) \right] \\ &\quad \times \int d\mu_{s(w)}(\psi) \text{Hor}^j(e^{-\int \mathcal{L}(\psi)(x)dx}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

où $\text{Hor}^j := \prod_{\ell \in L(\mathbb{F}^j)} \left(\frac{\delta}{\delta \psi^j(x_\ell)} \frac{\delta}{\delta \psi^j(x'_\ell)} \right)$ sera appelé *opérateur de développement horizontal**.

Regardons maintenant comment cette formule s'applique dans un contexte multi-échelles. Le développement à l'échelle ρ s'applique à la fonction $\int e^{-\int_V \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi^{-\rho})(x)dx} d\mu(\psi^\rho)$, dans laquelle les champs de bas moment $\psi^{\rightarrow(\rho-1)}$ sont considérés comme des sources. Le produit de ce développement est une somme de produit de termes factorisés sur chaque arbre \mathbb{T}^ρ provenant de la formule de Brydges–Kennedy–Abdessalam–Rivasseau. Chaque terme factorisé est une somme de termes du type $C^\rho G^\rho e^{-\int_{\mathbb{T}^\rho} \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi^{-\rho})(x)dx}$, où: C^ρ est un produit de propagateurs $C^\rho(x_\ell, x'_\ell)$ d'échelle ρ ; G^ρ est un produit (fini) de champs $\psi^{-\rho}$.

En réalité, ce développement s'applique non pas à la fonction de partition $Z^{-\rho}$, mais à la fonction $Z^{-\rho}(\mathbf{t})$, où les coefficients $t_{\Delta^j}^j, j \in \mathbb{Z}, \Delta^j \in \mathbb{D}^j$ multipliant diversement les différentes échelles des champs sont introduits en vue du développement multi-échelles (cf. §2.2). La décomposition précédente reste néanmoins valable, on obtient des termes du type $C^\rho G^\rho e^{-\int_{\mathbb{T}^\rho} \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi^{-\rho}; \mathbf{t})(x)dx}$ où la dépendance en les paramètres \mathbf{t} est cachée dans le monôme G^ρ .

Les développements aux différentes échelles s'obtiennent de la même manière. D'un point de vue logique, après avoir complété les développements en clusters aux échelles $\rho, \dots, j+1$ et obtenu des polymères, il suffirait d'affaiblir par des paramètres s les liens entre cubes d'échelle j situés à la base de polymères *distincts*. En pratique cette procédure n'est pas dénuée d'ambiguïté, et plutôt que de définir une procédure précise relativement arbitraire, on peut mettre sans dommage des paramètres d'affaiblissement s entre tous les cubes d'échelle j .

Deuxième application: développement de Mayer

Ce développement permet de séparer la contribution des polymères du vide* à l'énergie libre, comme nous l'expliquons ci-dessous, et de resommer les parties locales des polymères divergents en vue de la renormalisation. Contentons-nous ici de montrer comment effectuer ce développement à l'aide de la formule de Brydges–Kennedy–Abdesselam–Rivasseau. Un polymère $\mathbb{P}^{j \rightarrow}$ multi-échelle d'échelle minimale j est un ensemble connexe de cubes d'échelles $k = j, j+1, \dots, \rho$ reliés par des liens horizontaux (entre cubes de même échelle) ou verticaux, encore dits *liens d'inclusion**, reliant Δ^k , $k > j$ à l'unique cube Δ^{k-1} d'échelle $k-1$ contenant Δ^k . Deux polymères $\mathbb{P}_1^{j \rightarrow}, \mathbb{P}_2^{j \rightarrow}$ sont dits *non- j -overlapping* (sans recouvrement à l'échelle j ?) si $\mathbb{P}_1^{j \rightarrow}$ et $\mathbb{P}_2^{j \rightarrow}$ n'ont pas de cube en commun à l'échelle j , autrement dit, si $(\mathbb{P}_1^{j \rightarrow} \cap \mathbb{D}^j) \cap (\mathbb{P}_2^{j \rightarrow} \cap \mathbb{D}^j) = \emptyset$. Les objets sont cette fois-ci des polymères, et les liens, des liens de non-overlap qu'on souhaite supprimer. La formule de BKAR permet de ne garder des liens de non-overlap qu'entre les cubes appartenant à un même arbre de polymères. Le développement fait apparaître de manière générale des *forêts de polymères* – une sorte de superstructure arborescente si l'on pense que les polymères sont eux-mêmes des arbres –. Les paramètres d'affaiblissement sont notés ici S (pour ne pas les confondre avec les paramètres s du développement en clusters horizontal). Le lecteur vérifiera facilement que mettre des paramètres S à 0 équivaut à autoriser deux polymères à se chevaucher librement, alors que dériver par rapport à un paramètre S implique que les polymères ont au moins un cube en commun. Dans le deuxième cas, le cube en commun attache les deux polymères l'un à l'autre, supprimant la liberté de déplacement horizontal de l'un par rapport à l'autre; l'arbre de polymères ainsi créé se borne alors comme un polymère simple puisqu'il a été rendu connexe (cf. §3.2). Dans le premier cas, les contributions des deux polymères se multiplient, permettant la resommation en exponentielle. Si ces polymères possèdent des champs externes, il faut néanmoins les considérer comme des “polymères colorés”, de couleurs différentes (puisque'ils ont été rendus totalement indépendants l'un par rapport à l'autre). Itérant le développement à chaque échelle, on voit qu'il faut donc travailler de manière générale avec des “champs colorés”, $\tilde{\psi}^j : \mathbb{R}^D \times \{\text{couleurs}\} \rightarrow \mathbb{C}$. Les corrections aux bornes gaussiennes du §3.2 sont mineures (cf. [51] pour les détails).

Lemme 2.2. Soit $\text{NonOverlap}^j(\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_N) := \prod_{(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{n'})} \mathbf{1}_{\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{n'} \text{ non-}j\text{-overlapping}}$ et

$$\begin{aligned} & \text{NonOverlap}^j(\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_N; \mathbf{S}) \\ &:= \prod_{(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{n'})} ((1 - S_{\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{n'}}) + S_{\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{n'}} \mathbf{1}_{\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{n'} \text{ non-}j\text{-overlapping}}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Alors

$$\begin{aligned} & \text{NonOverlap}^j(\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_N) \\ &= \sum_{\mathcal{F}(\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_N\})} \left(\prod_{\ell \in L(\mathcal{F})} \int_0^1 dW_\ell \right) \left(\prod_{\ell \in L(\mathcal{F})} \frac{\partial}{\partial S_\ell} \right) \text{NonOverlap}^j(\mathbf{S}(\mathbf{W})), \end{aligned} \quad (2.9)$$

où $\mathcal{F}(\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_N\})$ est l'ensemble des forêts reliant les polymères $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_N$.

En pratique on distinguera entre les polymères de type 1 (possédant $< N_{\text{ext}, \max}$ champs externes) et ceux de type 2 (possédant $\geq N_{\text{ext}, \max}$ champs externes) – puisque le développement de Mayer sert en principe à resommer les parties locales des polymères divergents –, et on n'affaiblira la condition de non-overlap qu'entre les cubes dans lesquels aucun champ externe n'est situé, ceci afin d'éviter l'accumulation de champs externes dans le même cube que pourraient créer les S -dérivations autrement, et on appliquera la 2ème formule de Brydges–Kennedy–Abdesselam–Rivasseau au lieu de la 1ère. Nous n'écrirons pas la formule explicitement.

2.2. Développement en clusters vertical

Ce développement est en réalité un développement de Taylor partiel dans chaque cube d'une échelle donnée. En ce sens ce n'est pas réellement un développement en cluster, et la formule de Brydges–Kennedy–Abdesselam–Rivasseau ne s'applique pas. Néanmoins, comme nous allons voir, il conduit à une séparation effective de l'ensemble des cubes $\Pi_j \mathbb{D}^j$ en morceaux disjoints appelés *polymères*, qu'on peut voir comme des “clusters” ou amas multi-échelles, et les paramètres $t \in [0, 1]$ ci-dessous jouent un rôle très similaire aux paramètres d'affaiblissement s ou S des paragraphes précédents. La terminologie n'est pas fixée, on parle soit de développement en cluster vertical*, soit (plus justement peut-être) de “momentum-decoupling expansion” ou “développement sur le couplage entre échelles”.

Définition 2.3. (paramètres verticaux) On note \mathbf{t} un ensemble de paramètres $t_{\Delta^j}^j$, $j \in \mathbb{Z}$, $\Delta^j \in \mathbb{D}^j$, associé chacun à un cube donné. De manière équivalente, $x \mapsto t_x^j := t_{\Delta_x^j}^j$, où Δ_x^j est l'unique cube d'échelle j contenant un point x , définit une fonction localement constante dans chaque cube.

Voici une première définition possible.

Définition 2.4. (Lagrangien habillé*) Soit $\prod_{i=1}^I \psi_i(x)$ un monôme contenu dans le lagrangien d'interaction, et $\mathcal{L}_{\text{int}}^{\rightarrow \rho}(\psi)(x) := \lambda^\rho \prod_{i=1}^I \psi_i^{\rightarrow \rho}(x)$ sa troncature* ultra-violet, couplée à une constante de couplage λ^ρ . Alors le lagrangien habillé* associé est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\rightarrow \rho}(\psi; \mathbf{t})(x) &:= \lambda^\rho \prod_{i=1}^I (T\psi_i)^{\rightarrow \rho}(x) \\ &+ \sum_{\rho' \leq \rho} \lambda^{\rho'-1} (1 - (t_x^{\rho'})^I) \prod_{i=1}^I (T\psi_i)^{\rightarrow (\rho'-1)}(x), \end{aligned} \quad (2.10)$$

où $(T\psi)^{\rightarrow \rho'}$ est le champ habillé défini par la formule de récurrence $(T\psi)^{\rightarrow \rho'}(x) := \psi^{\rho'}(x) + t_x^{\rho'}(T\psi)^{\rightarrow (\rho'-1)}(x)$.

Lorsque la constante de couplage λ n'est pas renormalisée, la formule se simplifie, la constante λ étant en facteur à la fois dans $\mathcal{L}_{\text{int}}(\psi)$ et dans $\mathcal{L}_{\text{int}}(\psi; \mathbf{t})$; comme pour les développements en cluster, on retrouve alors la théorie initiale lorsque $\mathbf{t} = 1$, autrement dit, $\mathcal{L}_{\text{int}}(\psi)(x) = \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi; \mathbf{1})(x)$. Mais en général, la renormalisation induit un flot du paramètre λ , λ^j étant la constante de couplage effective relative à l'échelle j . Cette constante effective s'obtient en pratique en sommant les contre-terms de toutes les échelles $\geq j$. Autrement dit, le *contre-terme d'échelle* j , $-(\lambda^{j-1} - \lambda^j)$, compense les divergences de la théorie dues aux sous-diagrammes dont l'échelle la plus basse est précisément égale à j .^h

La formule (2.10) se réécrit à l'aide des contre-terms d'échelle j , en faisant une resommation d'Abel,

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\rightarrow \rho}(\psi; \mathbf{t})(x) = \sum_{\rho' \leq \rho+1} (\lambda^{\rho'-1} - \lambda^{\rho'}) \sum_{\rho'' \leq \rho'} (1 - (t_x^{\rho''})^I) \prod_{i=1}^I (T\psi_i)^{\rightarrow (\rho''-1)}(x), \quad (2.11)$$

où l'on a posé $\lambda^{\rho+1} = 0$ et $t_x^{\rho+1} = 0$.

Dans le cas des chemins rugueux renormalisés, la mise en ordre normal de Fourier fait apparaître un lagrangien d'interaction décomposé en échelles. Pour un lagrangien du type $\mathcal{L}_{\text{int}}(\psi)(x) = \sum_{(j_i)_{i \in I}} K^{(j_i)} \prod_{i=1}^I \psi_i^{j_i}(x)$, la formule d'habillage se généralise ainsi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\rightarrow \rho}(\psi; \mathbf{t})(x) &:= \lambda^\rho \sum_{0 \leq (j_i)_{i \in I} \leq \rho} K^{(j_i)} \prod_{i=1}^I (T^{\rightarrow \rho} \psi_i)^{j_i}(x) \\ &+ \sum_{\rho' \leq \rho} \lambda^{\rho'-1} (1 - (t_x^{\rho'})^I) \sum_{0 \leq (j_i)_{i \in I} \leq \rho'-1} K^{(j_i)} \prod_{i=1}^I (T^{\rightarrow (\rho'-1)} \psi_i)^{j_i}(x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

^hPlus précisément, $\lambda^{j-1} - \lambda^j$ est égale à la somme des contributions des *parties locales* des *polymères* dont l'échelle la plus basse est égale à j (cf. infra).

où $(T^{\rightarrow\rho'}\psi)^j(x) = t_x^{\rho'} t_x^{\rho'-1} \dots t_x^{j+1} \psi^j(x)$ ($\rho' \geq j$) est la composante d'échelle j de $(T\psi)^{\rightarrow\rho'}(x)$.ⁱ

Nous pouvons maintenant introduire le développement vertical. De la même manière que le développement horizontal s'obtient par un développement de Taylor habile en les variables $s_{\Delta_\ell, \Delta'_\ell}$ autour de la valeur $s = 0$, le développement vertical s'obtient par un simple développement de Taylor à l'ordre $N_{\text{ext,max}}$ en les variables t_Δ . On peut formaliser ainsi ce développement:

Définition 2.5. (opérateurs de développement vertical) Soit $j \in \mathbb{Z}$ et \mathbb{T}^j un arbre reliant des cubes d'échelle j ; on note $\text{Vert}_{\mathbb{T}^j}^j$ l'opération de développement de Taylor à l'ordre $N_{\text{ext,max}}$ dans chacun des cubes de \mathbb{T}^j ,

$$\begin{aligned} \text{Vert}^j[f(t_{\Delta^j}^j, \Delta^j \in \mathbb{T}^j)] \\ = \prod_{\Delta^j \in \mathbb{T}^j} \left\{ \mathbf{1} \Big|_{t_{\Delta^j}^j=0} + \partial_{t_{\Delta^j}^j} \Big|_{t_{\Delta^j}^j=0} + \dots + \partial_{t_{\Delta^j}^j}^{N_{\text{ext,max}}-1} \Big|_{t_{\Delta^j}^j=0} \right. \\ \left. + \int_0^1 dt_{\Delta^j}^j \frac{(1 - t_{\Delta^j}^j)^{N_{\text{ext,max}}-1}}{(N_{\text{ext,max}} - 1)!} \partial_{t_{\Delta^j}^j}^{N_{\text{ext,max}}} \right\} f(t_{\Delta^j}^j, \Delta^j \in \mathbb{T}^j). \quad (2.13) \end{aligned}$$

La formule de Taylor avec reste intégral donne $f(\mathbf{1}) = \text{Vert}^j f$. Appliquée à l'échelle ρ à la trace sur un arbre \mathbb{T}^ρ du développement en cluster horizontal à l'échelle ρ , elle produit une somme de produits de termes du type $G((t_{\Delta^\rho}^\rho)_{\Delta^\rho \in \mathbb{T}^\rho}) e^{-\int_{\mathbb{T}^\rho} \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi; (t_{\Delta^\rho}^\rho)_{\Delta^\rho \in \mathbb{T}^\rho})(x) dx}$, multipliés par un produit de propagateurs d'échelle ρ . Séparons les champs $(T\psi)^{\rightarrow\rho}(x)$ apparaissant dans G en $\psi^\rho(x) + t_x^\rho (T\psi)^{\rightarrow(\rho-1)}(x)$, et voyons le résultat sur le support de l'arbre \mathbb{T}^ρ de l'action des différents termes dans les opérateurs de développement vertical Vert^ρ . Le principe général est que chaque dérivation $\partial_{t_{\Delta^\rho}^\rho}$ produit un champ de bas moment $(T\psi)^{\rightarrow(\rho-1)}$. On trouve les différents cas suivants:

- (i) Choisissons le terme de degré 0, $\mathbf{1}|_{t_{\Delta^\rho}^\rho=0}$, dans chaque cube de \mathbb{T}^ρ . Alors tous les termes $t_x^\rho (T\psi)^{\rightarrow(\rho-1)}(x)$ dans G ont été mis à zéro. L'expression résultante ne contient donc pas de sources ou champs externes de moment $\leq \rho - 1$, c'est une constante qu'on appelle *polymère du vide*^{*}. En développant en série $e^{-\int_{\mathbb{T}^\rho} \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi^\rho)(x) dx}$ l'exponentielle dans laquelle tous les champs de bas moment ont été mis à zéro, on retrouverait la somme formelle des *diagrammes du vide*^{*} d'échelle ρ de la théorie perturbative. Mais en théorie perturbative, les diagrammes du vide ne sont pas considérés; en effet, leur resommation conduit à une exponentielle qui change simplement le facteur de normalisation de la mesure, et ne modifie donc pas les fonctions à n points. Les contraintes de non-overlap entre polymères ne permettent pas une resommation exponentielle directe en théorie constructive, mais le développement de Mayer permet

ⁱ Autrement dit, $(T\psi)^{\rightarrow\rho'}(x) = \sum_{j \leq \rho'} (T^{\rightarrow\rho'}\psi)^j(x)$, cf. Éq. (2.10).

de lever ces contraintes de non-overlap, faisant apparaître un facteur exponentiel égal à $e^{|V|M^{D\rho}f_V^\rho}$, où f_V^ρ converge quand $|V| \rightarrow \infty$ vers l'énergie libre par degré de liberté d'échelle ρ , notée f^ρ , et d'ordre $O(\lambda)$.

- (ii) A l'autre extrême, supposons que le reste intégral ait été choisi pour au moins l'un des cubes dans \mathbb{T}^ρ . Le polymère possède donc au moins $N_{\text{ext,max}}$ champs externes. Le comptage de puissance expliqué en Sec. 1 montre que les diagrammes de Feynman possédant suffisamment de pattes externes sont superficiellement convergents. On définit alors $N_{\text{ext,max}} - 1$ comme le nombre maximum de pattes externes d'un diagramme de Feynman superficiellement divergent.
- (iii) Les cas intermédiaires se rangent plutôt dans la première ou deuxième catégorie, suivant le nombre de champs externes. Si celui-ci est $< N_{\text{ext,max}}$, on retire à ce polymère sa *partie locale* – ou *évaluation à moments externes nuls*. Graphiquement, l'évaluation à moments externes nuls est équivalente à *déplacer tous les champs externes au même point* [71]. Après le développement de Mayer, cette extraction de parties locales s'avère équivalente à une renormalisation des paramètres. Au contraire, s'il est $\geq N_{\text{ext,max}}$, on ne fait rien; le polymère est considéré comme superficiellement convergent.

2.3. Développement en clusters multi-échelles

En théorie perturbative des champs, un comptage de puissance “naïf” (mono-échelle) permet de repérer les structures externes possibles des graphes superficiellement divergents. Le début de leur développement de Taylor à moments externes nuls (appelé *partie locale* dans le langage de la théorie constructive) est mis à part et resommé. Leur contribution s'obtient de manière équivalente en rajoutant un contre-terme au lagrangien, ou encore en remplaçant les paramètres nus* par les paramètres renormalisés.

L'idée est exactement la même en théorie constructive, à ceci près que: les diagrammes de Feynman sont remplacés par des polymères multi-étages; la resommation des parties locales ne peut se faire qu'*après* avoir levé la contrainte de non-overlap entre les polymères (développement de Mayer). La procédure précise est facile à comprendre, mais les notations précises sont lourdes, et le développement de Mayer complique de manière inessentielle les bornes constructives de la section suivante puisqu'il impose de sommer sur des *arbres de polymères* au lieu de polymères. Nous nous contenterons donc de présenter ici les arguments essentiels, en allégeant les notations. Le développement se fait par récurrence, en partant de l'échelle la plus haute, ρ , suivant le schéma: $\text{Hor}^\rho \rightarrow \text{Vert}^\rho \rightsquigarrow \text{Hor}^{\rho-1} \rightarrow \text{Vert}^{\rho-1} \rightsquigarrow \dots$, où Hor^j , resp. Vert^j , symbolise le développement en clusters horizontal, resp. vertical à l'échelle j . Chaque flèche intermédiaire \rightsquigarrow recouvre en fait trois opérations élémentaires successives. Plaçons-nous à l'échelle j , c'est-à-dire juste après le développement vertical d'échelle j . On suppose (hypothèse de récurrence) que la fonction de partition a été réécrite comme un produit $\prod_{k=j+1}^\rho e^{|V|M^{Dk}f^{k \rightarrow \rho}(\lambda)}$

(contribution à la fonction de partition des degrés de liberté d'échelles $> j$), multiplié par une somme sur des polymères (en fait: sur des arbres de polymères) d'échelle la plus basse $\geq j$ sans overlap à l'échelle j , i.e.

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{\text{non-}j\text{-overlapping } \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n \in \mathcal{P}^j \rightarrow} \prod_{n=1}^N F_{HV}^j(\mathbb{P}_n; \psi), \quad (2.14)$$

obtenue après les développements horizontal (H) et vertical (V) à l'échelle j .

- (1) Si le polymère \mathbb{P}_n possède $< N_{\text{ext}, \max}$ champs externes, on met de côté sa partie locale, obtenue en déplaçant tous les champs externes au même point. Ce qui reste est considéré artificiellement (pour la cohérence du schéma) comme un polymère avec $\geq N_{\text{ext}, \max}$ champs externes puisqu'il est convergent.
- (2) On applique le développement de Mayer à l'échelle j à l'expression (2.14).
- (3) On resomme les polymères du vide en une exponentielle $e^{|V| M^j f^{j \rightarrow \rho}(\lambda)}$, et les parties locales des polymères divergents (avec un nombre de champs externes compris entre 1 et $N_{\text{ext}, \max} - 1$ donc) en un contre-terme d'échelle j qu'on remet dans le lagrangien.

3. Bornes Constructives

On retrouve ici le comptage de puissance de la Sec. 1, mais avec l'obligation de savoir sommer sur tous les "graphes" simultanément, qui complique singulièrement le problème. Le principe général est que le développement multi-échelles a produit une somme de termes du type $\prod_{j \in \mathbb{Z}} \int d\mu_{\mathbf{s}^j}(\psi^j) C^j G^j e^{-\int \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi; \mathbf{t})(x) dx}$, abrégés en $C^j G^j e^{-\int \mathcal{L}_{\text{int}}}$, où: $\mathbf{s}^j, \mathbf{t}_{\Delta_j}^j$ sont les paramètres des développements en cluster horizontaux et verticaux; C^j est un produit de propagateurs d'échelle j ; G^j est un produit de champs d'échelle j produits par des développements en cluster d'échelle arbitraire; et $\mathcal{L}_{\text{int}}(\psi; \mathbf{t})$ est un lagrangien multi-échelle avec des paramètres renormalisés qu'on détermine de manière récursive. Il faut donc commencer par estimer ces paramètres renormalisés, qu'on obtient comme solution d'équations implicites. On peut alors calculer l'énergie libre ou les fonctions à n points. Tous ces calculs reposent sur les mêmes principes: (i) on borne l'exponentielle $e^{-\int \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi; \mathbf{t})(x) dx}$, si possible (mais pas toujours) par 1 (ou en tout cas une constante par cube), et on se ramène par l'inégalité de Cauchy-Schwarz à calculer $\prod_{j \in \mathbb{Z}} \int d\mu_{\mathbf{s}^j}(\psi^j) (C^j G^j)^2$; (ii) on utilise la formule de Wick en considérant toutes les contractions possibles, ce qui produit des sommes de diagrammes de Feynman multi-échelles (avec des contraintes de non-overlap); (iii) on somme sur toutes les forêts de cluster (et forêts de polymères de Mayer) possibles (*bornes gaussiennes**), en tenant compte des *facteurs combinatoires* de la formule de Leibniz donnant la dérivée d'un produit (chaque dérivation $\frac{\partial}{\partial s_{\Delta_j, (\Delta_j)'}}^j$ agissant comme $\frac{\delta}{\delta \psi(x_\ell)} \frac{\delta}{\delta \psi(x'_\ell)}$, ou $\frac{\partial}{\partial t_j^{\Delta_j}}$, agissant sur un produit de champs). Si l'on avait développé l'exponentielle en série, cette somme divergerait en raison de facteurs exponentiels dûs à l'accumulation de champs d'échelle j dans une zone de taille de l'ordre de M^{-j} . Il faut vérifier que les développements

en cluster évitent l'apparition de ces facteurs exponentiels. En pratique, des factorielles apparaissent si l'on n'y prend garde, en raison de l'accumulation de *champs moyennés de bas moment* (cf. explications ci-dessous); ces champs moyennés doivent être *dominés* directement par une exponentielle décroissante provenant de l'action $e^{-\int \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi; \mathbf{t})(x) dx}$. Contrairement aux *bornes gaussiennes* et aux facteurs combinatoires, essentiellement universels, la *domination* dépend fortement du modèle considéré, en particulier des dimensions d'échelle des champs; elle n'est possible que sous des hypothèses de *stricte positivité du lagrangien*, proches dans l'esprit d'hypothèses de convexité. Bien entendu, toutes les bornes dépendent de manière essentielle du flot du groupe de renormalisation.

Tous ces problèmes combinés contribuent à rendre les bornes constructives illisibles. Malgré de nombreux efforts de simplification, de systématisation ou de réécriture algébrique [1, 34, 49], il semble qu'un principe de non-réduction des difficultés opère ici. Néanmoins, dans le cadre de ce "mode d'emploi", on peut présenter les arguments essentiels revenant de manière récurrente dans tous les modèles bosoniques considérés, en espérant que les lignes qui suivent permettront au lecteur de s'orienter dans les articles complets. Nous ne discutons pas ici la *domination*, préférant l'introduire dans la section suivante sur des modèles concrets.

3.1. Comptage de puissance constructif

Rappelons que la covariance de la composante d'échelle j d'un champ de dimension β est bornée par $|\langle \psi^j(x) \psi^j(y) \rangle| \leq C_r \frac{M^{2\beta j}}{(1+M^2|x-y|)^r}$. Si l'on oublie la décroissance spatiale, chaque composante de champ ψ^j contribue un facteur $M^{\beta j}$, explicite dans le comptage de puissance des diagrammes multi-échelles (cf. Sec. 1).

Voyons les différents champs produits par les développements en cluster horizontaux et verticaux: on obtient (*pour la commodité de la lecture, les indices d'échelles h, j, k sont systématiquement classés par ordre croissant, $h \leq j \leq k$*)

- (i) des *propagateurs* $C^j(x, y) = \langle \psi^j(x) \psi^j(y) \rangle$ produits par le développement horizontal, d'ordre de grandeur $M^{2\beta j}$.
- (ii) des *champs de haut moment* produits par les développements horizontaux comme verticaux; les opérateurs horizontaux $\frac{\delta}{\delta \psi^j(x_\ell)}$ ou verticaux $\frac{\delta}{\delta t^j_{\Delta^j}}$

appliqués à l'exponentielle $e^{-\int \mathcal{L}_{\text{int}}}$ ou à un produit de champs G (provenant des développements en cluster des échelles supérieures) peuvent faire sortir en particulier des champs $\psi^k(x)$, $x \in \Delta^j$, d'échelle $k > j$. On distingue alors l'échelle de production* j de ces champs de leur échelle propre* k . Pour les *bornes gaussiennes* on sépare en pratique $\psi^k(x)$, $x \in \Delta^j$ en somme de *champs restreints** $\text{Res}_{\Delta^k}^j \psi^k(x) := \mathbf{1}_{x \in \Delta^k} \psi^k(x)$, où Δ^k décrit les $M^{D(k-j)}$ cubes d'échelle k contenus dans Δ^j . Rappelons que ces champs de haut moment sont un sous-produit de la méthode constructive; ils n'apparaissent pas quand on étudie un diagramme de Feynman multi-échelle donné.

- (iii) des champs de bas moment $\psi^h(x), x \in \Delta^j$ ($h \leq j$) produits par les mêmes développements. Comme dans le comptage de puissance des diagrammes de Feynman multi-échelle, on fait *comme si* ψ^h était d'échelle j . Autrement, le facteur $M^{\beta h}$ apporté par la composante ψ^h est décomposé en $M^{\beta j} \cdot M^{-\beta(j-h)}$. Si l'on est tout à fait précis, ces champs de bas moment ont non pas *deux* échelles mais *trois échelles*, en raison du fait qu'ils peuvent être redérivés à plusieurs échelles successives. Soit k l'échelle de production*, correspondant à la première dérivation $\frac{\delta}{\delta \psi^k(x_\ell)}$ ou $\frac{\delta}{\delta t_{\Delta^k}^k}$ ayant fait sortir le champ $(T\psi)^{\rightarrow(k-1)}(x) = \psi^{(k-1)}(x) + t_x^{k-1} \psi^{(k-2)}(x) + \dots$. A l'échelle suivante $k-1$, la dérivation $\frac{\partial}{\partial t_x^{k-1}}$ peut agir à son tour sur $(T\psi)^{\rightarrow(k-1)}(x)$, produisant le champ $(T\psi)^{\rightarrow(k-2)}$, et ainsi de suite jusqu'à une échelle j , "poussant" le champ de bas moment initial $(T\psi)^{\rightarrow k}$ vers le bas, puisque ses échelles les plus hautes sont rabotées au fur et à mesure. Par hypothèse le champ $(T\psi)^{\rightarrow(j-1)}(x)$ n'est pas touché par les (éventuelles) dérivations $\frac{\partial}{\partial t_x^{j-1}}$. Il faut bien tenir compte dans les *facteurs combinatoires* de l'éventuelle possibilité qu'il soit redérivé à des échelles inférieures, mais c'est un problème d'ordre différent (plus simple peut-être) que nous passerons sous silence. Pour les *bornes gaussiennes*, on décompose le champ $(T\psi)^{\rightarrow(j-1)}(x)$ en ses différentes échelles $h < j$. Les composantes résultantes, $\psi^h(x)$, ont donc une *échelle de production** k , une *échelle de dernière t-dérivation consécutive* j , et une *échelle propre* h . L'image employée dans [51] est celle d'un ascenseur emmenant le champ $(T\psi)^{\rightarrow(k-1)}$ jusqu'à l'échelle j , puis le laissant tomber en chute libre et éclater en ses différentes composantes $\psi^h, h < j$. D'où les termes imagés de *dropping scale* (échelle de lâchage?) au lieu de l'appellation précise mais imprononçable d'*échelle de dernière t-dérivation consécutive*, et d'*échelle de chute libre* ("free falling scale") en concurrence avec *échelle propre*.

Il faut donc écrire en fait $M^{\beta h} = M^{\beta k} \cdot M^{-\beta(k-j)} \cdot M^{-\beta(j-h)}$, les deux *facteurs de ressort**, $M^{-\beta(k-j)}$ et $M^{-\beta(j-h)}$, étant utilisés séparément dans deux contextes différents; on ne s'intéressera ici qu'au deuxième facteur, $M^{-\beta(j-h)}$. En éclatant en leurs différentes composantes, les champs de bas moment lâchés à l'échelle j produisent potentiellement une accumulation de composantes ψ^h (champs d'échelle propre h) dans un seul et même cube Δ^h ; leur nombre maximum est de l'ordre de $M^{D(j-h)}$, égal au nombre de cubes d'échelle j contenus dans Δ^h . Un calcul un peu sommaire montre les dangers possibles de cette accumulation. La formule de Wick donne $\mathbb{E}X^n = 1 \cdot 3 \cdots (n-1) = \frac{n!}{2^{n/2}(n/2)!} \approx \sqrt{n^n}$ (n pair) pour une variable gaussienne standard X , autrement dit un facteur de l'ordre de \sqrt{n} par variable. Le facteur de décroissance polynômial étant ici de l'ordre de 1 puisque tous les champs ψ^h sont dans le même cube d'échelle h , on a un facteur de l'ordre de $\sqrt{M^{D(j-h)}}$ par champ, multiplié par le facteur de ressort $M^{-\beta(j-h)}$, au total un facteur < 1 à condition que $\beta > D/2$. Dans le cas contraire ($\beta \leq D/2$), on retire au champ $\psi^h(x)$ sa moyenne sur le cube

ψ^{Δ^j} où il a été lâché. Le résultat,

$$\delta^j \psi^h(x) := \psi^h(x) - \frac{1}{|\Delta^j|} \int_{\Delta^j} \psi^h(x) dx \quad (3.1)$$

appelé *champ secondaire**, est d'un ordre inférieur au champ ψ^h , au sens où le facteur de ressort n'est plus $M^{-\beta(j-h)}$ mais $M^{-\tilde{\beta}(j-h)}$ avec $\tilde{\beta} = \beta + 1$. Parfois – comme dans le cas de la théorie ϕ^4 non massive avec cut-off ultra-violet [22] – il arrive qu'il faille utiliser une procédure de soustraction de moyenne un peu plus astucieuse, de sorte que $\tilde{\beta} = \beta + 2$. Dans tous les cas, une procédure ou une autre permet d'obtenir un exposant $\tilde{\beta}$ (différant de β par un entier positif) tel que $\tilde{\beta} > D/2$. On peut poser $\tilde{\beta} = \beta$ si $\beta > D/2$ dès le départ (auquel cas le champ secondaire est égal au champ initial ψ^h), de façon à regrouper tous les cas. Dans la suite on appellera *champ moyenné de bas moment* la différence $\psi^{\rightarrow j}(x) - \delta^j \psi^{\rightarrow j}(x)$ si $\beta \leq D/2$, et on la notera $\psi^{\rightarrow j}(\Delta^j)$.

3.2. Bornes gaussiennes

Ces bornes permettent de traiter les propagateurs, les champs de haut moment et les champs secondaires de bas moment, mais pas les champs moyennés de bas moment, d'accumulation dangereuse, qui seront traités séparément dans le paragraphe sur la domination.

Ces bornes sont essentiellement indépendantes du modèle (à ceci près qu'elles dépendent bien entendu du flot du groupe de renormalisation qui modifie les constantes). Elles ne présentent pas de difficulté particulière. Comme dans la Sec. 6 de [51], on va montrer comment les obtenir par étapes en partant de la formule de Wick.

(1) Formule de Wick

Rappelons que, si X_1, \dots, X_{2N} sont des variables gaussiennes,

$$\langle X_1, \dots, X_{2N} \rangle = \sum_{\text{pairings } \Pi} X_{\Pi}, \quad (3.2)$$

où $\Pi = \{(i_1, i_2), \dots, (i_{2N-1}, i_{2N})\}$ varie dans l'ensemble des “pairings” (appariements?) des variables (X_i) , et $X_{\Pi} = \langle X_{i_1} X_{i_2} \rangle \cdots \langle X_{i_{2N-1}} X_{i_{2N}} \rangle$. On en déduit facilement, en considérant successivement les différents “pairings” possibles de X_1 , puis de X_2 , etc.:

$$|\langle X_1, \dots, X_{2N} \rangle| \leq \prod_{i=1}^{2N-1} \left[1 + \sum_{j>i} |\langle X_i X_j \rangle| \right] \quad (3.3)$$

ou encore par un “rescaling” évident des variables (X_i) ,

$$|\langle X_1, \dots, X_{2N} \rangle| \leq K^{-n} \prod_{i=1}^{2N-1} \left[1 + K \sum_{j>i} |\langle X_i X_j \rangle| \right] \quad (3.4)$$

pour toute constante $K > 0$. Supposant que les covariances $\langle X_i X_j \rangle$ soient toutes du même ordre de grandeur, cette dernière borne est optimale quand K est choisie de sorte que les facteurs $K \langle X_i X_j \rangle$ soient de l'ordre de 1.

(2) Bornes mono-échelle

On fixe une échelle j et on considère uniquement les champs $X = \psi^j(x_\ell)$ insérés dans les propagateurs C^j provenant du développement cluster horizontal à l'échelle j . Naïvement on pourrait penser que le lemme de Wick est inutile puisqu'il suffit de majorer le produit de propagateurs. En fait (en utilisant la factorisation sur les forêts) l'on doit sommer sur tous les arbres possibles, ce qui revient approximativement à majorer des expressions du type $\sum_{\Pi} |X_{\Pi}|$, où: Π décrit l'ensemble des "pairings" d'un nombre *arbitraire* de champs $\psi^j(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, 2N$, $x_i \in \Delta_i^j$ (les cubes Δ_i^j n'étant pas nécessairement distincts), avec trois contraintes uniquement: (i) Π relie tous les cubes Δ_i^j , autrement dit, les liens entre les cubes dans lesquels se situent les champs forment un graphe *connexe*; (ii) le nombre $N^j(\Delta_i^j)$ de champs $\psi^j(x_i)$ contenus dans un cube fixé Δ_i^j est borné par $C n^j(\Delta_i^j)$, où $n^j(\Delta_i^j)$ est le degré de connectivité du cube Δ_i^j , autrement dit, un plus le nombre de cubes connectés à Δ_i^j ; (iii) un certain cube fixé Δ_0^j appartient au graphe de cubes.

Ces contraintes sont faciles à comprendre: (i) provient de la factorisation de la fonction de partition sur les arbres (ou composantes connexes) du développement en cluster horizontal; (ii) les champs proviennent des opérateurs de dérivation Hor^j et Vert^j , il y a au plus $In^j(\Delta_i^j)$, resp. $IN_{\text{ext}, \max}$ par cube, où I est le degré de l'interaction \mathcal{L}_{int} ; (iii) s'obtient en fixant un cube, opération nécessaire en raison de l'invariance globale par translation (en d'autres termes, de l'extensivité de l'énergie libre).

On obtient alors (cf. [51], Éq. (5.5)), en choisissant un arbre couvrant* le graphe de cubes et en explorant les sommets un à un en partant du cube fixé Δ_0^j :

$$\sum_{\Pi} \prod_{\Delta} (1 + N^j(\Delta))^{-1} |X_{\Pi}| \leq \left(1 + \sup_{\Delta \in \mathbb{D}^j} \sum_{\Delta' \in \mathbb{D}^j} \sup_{x \in \Delta, x' \in \Delta'} \langle \psi^j(x) \psi^j(x') \rangle \right)^{3N}. \quad (3.5)$$

L'insertion du facteur $(1 + N^j(\Delta))^{-1}$ permet de sommer sur tous les champs contenus dans un cube Δ donné. *A priori* il sort du chapeau, et sans ce facteur, on obtient ce qu'on a appelé historiquement des *factorielles locales** du type $N^j(\Delta)!$. Ce genre de facteurs sort de manière répétée dans les bornes constructives et se contrôle très facilement par la décroissance polynomiale des corrélations. En effet,

^jLes N pairings produisent *a priori* un facteur global à la puissance N . Le choix de l'arbre couvrant et le processus d'exploration conduisent au terme $(\cdot)^{3N}$, peut-être non optimal, dans l'Éq. (3.5).

on voit facilement qu'un cube Δ^j de degré de connectivité $n^j(\Delta^j)$ est connecté à au moins $n^j(\Delta^j)/2$ cubes Δ à distance $d^j(\Delta, \Delta^j) \geq C(n^j(\Delta^j))^{1/D}$ (en raison du fait que les cubes forment un pavage régulier de \mathbb{R}^D). Une partie du facteur de décroissance polynomiale en $\frac{1}{(1+\Delta^j(x,y))^r}$ peut être utilisée et produit l'inverse d'une factorielle locale. Si r peut être choisi assez grand, les factorielles locales disparaissent.

(3) Bornes multi-échelles

Venons-en maintenant aux vraies bornes, les précédentes n'ayant qu'un objectif pédagogique. On fixe une échelle de référence j_{\min} . *A priori* il faudrait considérer une somme sur tous les polymères possibles d'échelles $\rho, \rho - 1, \dots, j_{\min}$ et contenant au moins un cube à l'échelle j . Mais le calcul se fait comme dans la Sec. 1 en partant de l'échelle ρ , et en descendant au fur et à mesure dans les échelles; et la restriction du polymère aux échelles supérieures à une échelle donnée n'est pas nécessairement connexe. En pratique on décompose le calcul comme suit. On fixe un ensemble fini de cubes Δ de diverses échelles, et on somme sur toutes les forêts de cluster* dont tous les cubes sont connectés par un ensemble de liens horizontaux et verticaux à (au moins) l'un des cubes de l'ensemble Δ . Les composantes des champs des diverses échelles étant mutuellement indépendantes, on se ramène à calculer la contribution à la fonction de partition des composantes d'une échelle j donnée en considérant les différentes attributions d'échelles possibles pour chaque champ de chaque "vertex" $\int_{\Delta} \mathcal{L}_{\text{int}}(\psi)(x) dx$ produit par une dérivation horizontale ou verticale, où $\mathcal{L}_{\text{int}}(\psi)(x) = \prod_{i=1}^I \psi_i(x)$. Le résultat est le suivant:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\Pi} |X_{\Pi}| \leq & \left(1 + \max_{k \geq j} \sup_{\Delta^k \in \mathbb{D}^k} \left[\sum_{\Delta' \in \mathbb{D}^{j \rightarrow k}} \langle X_{\Delta^k} X_{\Delta'} \rangle \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{k' < k} \sum_{\Delta'' \in \mathbb{D}^{j \rightarrow k'}} \langle X_{\Delta^{k'}} X_{\Delta''} \rangle \right] \right)^{3N}, \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

où $\Delta^{k'} \supset \Delta^k$ est l'unique cube d'échelle $k' < k$ contenant Δ^k .

La somme sur $k' < k$ permet d'explorer tout le polymère à partir de l'échelle ρ , la restriction du polymère aux plus hautes échelles (comme nous l'avons déjà signalé) pouvant être connecté "par en-bas", i.e. par les lignes les plus basses.

Exactement de la même manière que les lignes externes des diagrammes de Feynman multi-échelles quasi-locaux de la Sec. 1 contribuaient un "facteur de ressort"* $M^{-\beta h t_r}$ assurant la convergence globale du diagramme renormalisé, chaque champ de bas moment ψ^j produit à l'échelle k (cf. §3.1) apporte un facteur de ressort $M^{-\beta(k-j)}$ – ou plus généralement $M^{-\tilde{\beta}(k-j)}$ une fois défalqués les champs moyennés éventuels –, de sorte que la contribution du terme entre crochets [] dans (3.6) est

de l'ordre de

$$\sum_{k'=j}^k M^{-\tilde{\beta}_i(k'-j)} \left[M^{-\tilde{\beta}_{i'}(k'-j)} \sum_{\Delta' \in \mathbb{D}^{k'}} \frac{1}{(1 + d^{k'}(\Delta^{k'}, \Delta'))^r} + \sum_{k''=j}^{k'-1} M^{-\tilde{\beta}_{i'}(k''-j)} \sum_{\Delta'' \in \mathbb{D}^{k''}} \frac{1}{(1 + d^j(\Delta^{k'}, \Delta''))^r} \right]. \quad (3.7)$$

La première somme sur les cubes d'échelle k' , $\sum_{\Delta' \in \mathbb{D}^{k'}} \frac{1}{(1 + d^{k'}(\Delta^{k'}, \Delta'))^r}$, est d'ordre 1; elle provient du développement en clusters horizontal d'échelle k' . La deuxième sur les cubes d'échelle $k'' < k'$, $\sum_{\Delta'' \in \mathbb{D}^{k''}} \frac{1}{(1 + d^j(\Delta^{k'}, \Delta''))^r}$, est d'ordre $M^{D(k''-j)}$, elle provient des champs de bas moment d'échelle j , produits aux échelles $k' > k'' > j$. Un bref calcul montre que la double somme converge si $-(\tilde{\beta}_i + \tilde{\beta}_{i'}) + D < 0$, condition réalisée puisque $\tilde{\beta}_i > D/2$ par définition.

Il reste à sommer sur les champs de *haut* moment, puis à sommer sur les différents choix possibles de l'ensemble Δ . La meilleure image possible de la procédure est celle que donnent les jeux de construction en bois ou en plastique pour les jeunes enfants, consistant à mettre les petits cubes dans les grands. Par exemple, la contribution d'un champ ψ^j de haut moment produit à l'échelle $h < j$ se calcule en considérant sa restriction $\text{Res}_{\Delta_j}^h \psi^j(x) := \mathbf{1}_{x \in \Delta_j} \psi^j(x)$ aux petits cubes $\Delta^j \subset \Delta^h$ comme en §3.1.2. Le volume d'intégration d'un champ restreint vaut $M^{-D(j-h)} \cdot M^{-Dh}$, d'où un facteur de ressort $M^{-D(j-h)}$. En considérant les différentes décompositions $\psi_{i_1}^{j_1} \cdots \psi_{i_I}^{j_I}$ possibles d'un vertex en échelles $j_1 \leq \cdots \leq j_I$, on montre que la resommation des petits cubes dans les grands n'est possible que si

$$\beta_{i_I}, \beta_{i_I} + \beta_{i_{I-1}}, \dots, \beta_{i_I} + \cdots + \beta_2 < D, \quad (3.8)$$

condition équivalente à l'hypothèse "high-momentum fields" de [51], autrement dit si les champs en jeu ne sont pas trop divergents dans l'ultra-violet; dans le cas contraire, la théorie est totalement instable aux hautes énergies. Les détails peuvent être trouvés dans [51].

4. Deux Modèles

Les sections précédentes donnent l'illusion que les arguments constructifs sont totalement généraux et peuvent être reproduits partout à l'identique. Dans les faits le choix des dimensions des champs et de l'interaction, ainsi que le flot du groupe de renormalisation créent des situations très différentes les unes des autres, se reflétant notamment dans la résolution des équations implicites donnant les paramètres renormalisés, et dans la méthode de *domination*. Nous avons donc choisi de présenter un modèle classique, le modèle ϕ^4 infra-rouge non massif en dimension 4, ainsi que le cas des chemins rugueux, pour donner au lecteur une vision moins exclusivement technique de la théorie constructive.

4.1. Théorie ϕ^4 de masse nulle

On considère ici le champ bosonique libre non massif ϕ avec une interaction ϕ^4 en dimension 4; c'est ce qu'on appelle habituellement la *théorie ϕ^4* . Il est bien connu que la constante de couplage diverge logarithmiquement dans la limite *ultra-violette*. La divergence ultra-violette de ce modèle est similaire à celle de l'électrodynamique quantique, d'où son utilisation fréquente comme "modèle jouet" (toy model) pour comprendre les difficultés de la renormalisation en physique des hautes énergies.^k Au contraire, la classification par Landau et Ginzburg des transitions de phases du second ordre [43] suggère que le *modèle ϕ^4 infra-rouge* et le *modèle d'Ising* sont dans la même classe d'universalité; la masse du champ bosonique est proportionnelle à l'écart de la température à la température critique, et le champ non massif reflète donc le modèle d'Ising précisément à la température critique.^l Du côté infra-rouge au contraire, la théorie devient asymptotiquement libre, la constante de couplage ayant une décroissance logarithmique; on prouve en fait que les fonctions à n points sont celles de la théorie libre non massive, à des corrections logarithmiques près.

Rentrons maintenant dans les détails. Le lagrangien d'interaction *nu* de ce modèle s'écrit $\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) = \lambda^0(\phi^{-0}(x))^4$, où $\phi^{-0} = \sum_{j=-\infty}^0 \phi^j$ est un champ gaussien sur \mathbb{R}^4 de covariance $\langle \phi^{-0}(x)\phi^{-0}(y) \rangle = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\chi_{[-0,0]}(\xi)}{|\xi|^2}\right)(x-y)$, correspondant approximativement à la troncature ultra-violette à l'échelle $j=0$ d'une mesure gaussienne qu'on pourrait écrire (de manière impropre) $e^{-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} |\nabla \phi|^2(x) dx} \mathcal{D}\phi$.^m Les développements en clusters conduisent à un lagrangien habillé*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi; \mathbf{t})(x) &= \lambda^0((T\phi)^{-0})^4(x) + \sum_{\rho' \leq 0} \lambda^{\rho'-1}(1 - (t_x^{\rho'})^4)((T\phi)^{-(\rho'-1)})^4(x) \\ &\quad + \delta\mathcal{L}_{\text{masse}}(\phi; \mathbf{t})(x) + \delta\mathcal{L}_{\text{onde}}(\phi; \mathbf{t})(x), \end{aligned} \quad (4.1)$$

où

$$\delta\mathcal{L}_{\text{masse}}(\phi; \mathbf{t})(x) = \sum_{\rho' \leq 0} (\delta m^2)^{\rho'-1}(1 - (t_x^{\rho'})^2)((T\phi)^{-(\rho'-1)})^2(x) \quad (4.2)$$

est le *contre-terme de masse*, et

$$\delta\mathcal{L}_{\text{onde}}(\phi; \mathbf{t})(x) = \sum_{\rho' \leq 0} (\delta Z_3)^{\rho'-1}(1 - (t_x^{\rho'})^2)|\nabla(T\phi)^{-(\rho'-1)}|^2(x) \quad (4.3)$$

le *contre-terme de fonction d'onde*. Au risque de nous répéter, $\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi; 1) = \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$ est le lagrangien initial de la théorie, et l'habillage avec les paramètres t , resp.

^kNotons néanmoins que le boson de Higgs massif (clé de voûte du modèle standard mais non encore observé) rentre dans le cadre de la théorie ϕ^4 .

^lLa fonction de Green $G(x, y)$ de l'opérateur $\Delta + m^2$ se comportant comme $e^{-m|x-y|}$ à grande distance, $1/m$ joue le rôle d'une *longueur de corrélation*, infinie à la température critique.

^mDans l'interprétation de ce modèle en physique statistique, ce cut-off ultra-violet revient à considérer le modèle d'Ising sur un réseau de maille de longueur $a = 1$ dans les unités choisies.

les contre-termes $\delta\mathcal{L}_{\text{masse}}$ et $\delta\mathcal{L}_{\text{onde}}$ ne proviennent que de développements d'ordre combinatoire et de resommations partielles de l'interaction; il ne s'agit donc pas de termes supplémentaires rajoutés à la main pour supprimer les divergences, comme on l'entend dire parfois.

Des calculs perturbatifs initiaux donnent une bonne idée du flot de la constante de couplage λ et des contre-termes δm^2 , δZ_3 . On s'inspirera ici des équations de Callan–Symanzik donnant le flot du groupe de renormalisation, telles que décrites dans le Chapitre 7 du livre de M. Le Bellac [43]. La constante de couplage flottante $\lambda(\xi)$ y est définie comme la somme des contributions de tous les diagrammes “one-particle irreducible” (1 P.I.) avec 4 propagateurs externes de moments d'ordre de grandeur ξ (cf. [43], éq. (7.1.3c)). Avec notre découpage en échelles, il est naturel ici de remplacer $\lambda(M^{-j})$ par λ^{-j} , qui est formellement la somme sur tous les diagrammes de lignes internes d'échelles $\geq -j$. La fonction $\beta(\lambda) = \frac{d\lambda}{d\ln \xi}$ (calculée à λ^0 – constante *nue** – fixée), donnant le flot de la constante de couplage, est approchée ici par le flot discret $\lambda^{-j-1} - \lambda^{-j} = -\beta(\lambda^{-j})$. La contribution principale à la fonction β provient du diagramme bulle de la Fig. 1 évaluée à moments externes nuls, avec la contrainte que l'un au moins des propagateurs (donc les deux par conservation des moments) soit d'échelle $-j$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\beta(\lambda^{-j}) &\approx (\lambda^{-j})^2 \int_{M^{-j-1} < |\xi| < M^{-j}} \frac{d^4 \xi}{(|\xi|^2)^2} + O((\lambda^{-j})^3) \\ &= c(\lambda^{-j})^2 + O((\lambda^{-j})^3),\end{aligned}\tag{4.4}$$

où $c > 0$ est une constante.

Le système dynamique discret $\lambda^{-j-1} - \lambda^{-j} = -c(\lambda^{-j})^2$ se comporte asymptotiquement comme le système dynamique continu $\frac{d\lambda}{ds} = -c\lambda^2$, avec $s := -\ln \xi$, donnant $\lambda^{-j} \simeq \frac{1}{(1/\lambda^0) + cj} \sim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{cj}$. Les contre-termes $(\delta m^2)^{-j}$ et $(\delta Z_3)^{-j}$ se calculent de la même manière en considérant le développement de Taylor à l'ordre 2 du diagramme “têtard” (tadpole), d'ordre λ (qui contribue uniquement au contre-terme de masse), et du diagramme à deux boucles, d'ordre λ^2 (cf. Fig. 2). On trouve

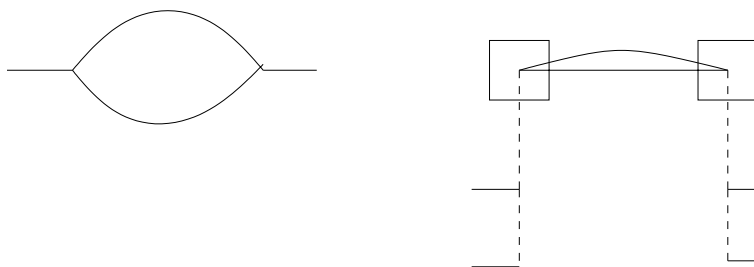


Fig. 1. Diagramme bulle.

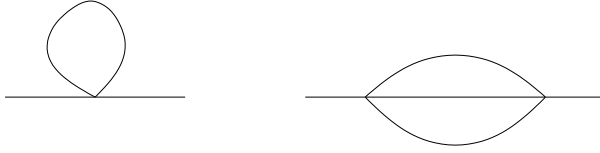


Fig. 2. De gauche à droite: diagramme “tadpole” (têtard); diagramme à deux boucles.

pour le diagramme “tadpole”

$$\begin{aligned}
 (\delta m^2)^{-j-1} - (\delta m^2)^{-j} &\approx \lambda^{-j} \int_{M^{-j-1} < |\xi| < M^{-j}} \frac{d^4 \xi}{\xi^2} \\
 &= c_m \lambda^{-j} M^{-2j} \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} \frac{M^{-2j}}{c_j},
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

et pour l'autre diagramme une nouvelle contribution à $(\delta m^2)^{-j-1} - (\delta m^2)^{-j}$ de l'ordre de $(\lambda^{-j})^2 M^{-2j}$, ainsi que

$$(\delta Z_3)^{-j-1} - (\delta Z_3)^{-j} \approx c_Z (\lambda^{-j})^2 \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} \frac{c_Z}{c^2 j^2}. \quad (4.6)$$

Au lieu d'une condition “initiale” (à l'échelle 0), on fixe une condition “terminale” $(\delta m^2)^{-\infty} = 0$, décrivant un champ non massif (cf. note i en bas de p. 26), et de même $(\delta Z_3)^{-\infty} = 0$. On trouve alors immédiatement $(\delta m^2)^{-j} = O(M^{-2j}/j)$, et $(\delta Z_3)^{-j} = O(1/j)$ *fini*, grâce à la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$.

Ces résultats sont confirmés par les bornes constructives de la section précédente, en remplaçant les sommes formelles sur les diagrammes 1 P.I. par la somme (convergente à chaque échelle) sur les polymères d'échelle minimum $-j$ à deux ou quatre propagateurs externes. Comme dans la théorie perturbative, les parties locales des polymères divergents sont resommées en les termes supplémentaires dans le lagrangien. Le champ ϕ est de dimension d'échelle $D/2 - 1 = 1$, l'hypothèse “high-momentum fields” (cf. Éq. (3.8)) est donc vérifiée. En revanche $1 < D/2 = 2$, ce qui impose (cf. §3.1) de séparer les champs moyennés de bas moment $\phi^{-j}(\Delta^j)$. Cette séparation fait que ceux-ci ne sont plus compensés par les contre-termes; on doit donc séparer les termes analogues dans les contre-termes également. Tous ces termes doivent être dominés par l'exponentielle de l'interaction. Celle-ci est inférieure à $\exp(-\lambda^0 \int ((T\phi)^{\rightarrow 0})^4(x) dx - \sum_{\rho' \leq 0} \lambda^{\rho'-1} (1 - (t_x^{\rho'})^4) \int ((T\phi)^{\rightarrow (\rho'-1)})^4(x) dx)$. Les champs moyennés de bas moment sont produits en faisant agir un opérateur de dérivation horizontal ou vertical, Hor ou Vert, sur un vertex $\int_{\Delta^k} \phi^4(x) dx$. Trois sur quatre tout au plus de ces champs prennent l'ascenseur ensemble et descendent (séparément ou pas) à des étages j , qui sont autant d'échelles de “lâchage”*. On peut accompagner chacun d'un facteur λ^κ , où $1/4 < \kappa < 1/3$, de sorte que les autres champs du vertex laissés à la porte de l'ascenseur puissent se partager un *petit* facteur $\lambda^{\kappa'}$, $\kappa' > 0$ servant aux bornes gaussiennes. Considérons tous les champs moyennés de bas moment $\lambda^\kappa \phi^{\rightarrow -j}(\Delta^{-j})$ lâchés dans un cube Δ^{-j} . On fait

maintenant la remarque simple suivante, reflétant la *stricte positivité* du lagrangien (cf. remarque dans l'introduction à la Sec. 3):

$$\lambda^\kappa |\phi^{\rightarrow-j}(\Delta^{-j})| \exp -\lambda \int_{\Delta^{-j}} (\phi^{\rightarrow-j})^4(x) dx \leq \frac{\lambda^{\kappa-1/4}}{|\Delta^{-j}|}, \quad (4.7)$$

conséquence de l'inégalité triviale $|x|e^{-A|x|} = A^{-1}(A|x|e^{-A|x|}) \leq A^{-1}$. En vérité, il faudrait tenir compte des deux faits suivants: (i) les champs ϕ (champs moyennés comme ceux présents dans l'interaction) sont décorés de t -facteurs $1 - t_{\Delta^{-j}}^{-j}$ ou $1 - (t_{\Delta^{-j}}^{-j})^4$; (ii) le cube peut contenir jusqu'à $O(n(\Delta^{-j}))$ champs moyennés ($n(\Delta^{-j})$ étant le degré de connectivité de Δ^{-j}). On montre facilement qu'ils ne changent rien au calcul précédent.

4.2. Chemins rugueux

Ce n'est pas le lieu d'expliquer en détails la théorie des chemins rugueux, ainsi que l'origine de la solution que nous avons apportée au problème de la définition de l'aire de Lévy du Brownien fractionnaire. Le lecteur intéressé pourra se référer à [69, 68, 67, 19]. Les constructions explicites de chemins rugueux que nous avons introduites reposent toutes sur des méthodes multi-échelles, et plus particulièrement sur la *mise en ordre normal de Fourier** des *intégrales squelette**. Définissons brièvement ces notions dans le cas du Brownien fractionnaire et des intégrales itérées d'ordre 2. On considère un champ stationnaire gaussien $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ sur \mathbb{R} (ici $D = 1$) à deux composantes indépendantes, de covariance Fourier $\langle |\hat{\phi}_i(\xi)|^2 \rangle = \frac{1}{|\xi|^{1+2\alpha}}$, où $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ est l'indice de Hurst du Brownien fractionnaire. Ce champ possède une divergence *infra-rouge* due à la non-intégrabilité de ce noyau en $\xi = 0$; le Brownien fractionnaire $B(t) := \phi(t) - \phi(0)$ est bien défini en revanche.ⁿ De manière générale les divergences infra-rouge qui apparaissent dans les calculs intermédiaires disparaissent lorsqu'on considère des incréments, ce qui est le cas de toutes les quantités construites à partir du Brownien fractionnaire, et on n'y fera plus attention. On décompose le champ ϕ en échelles ϕ^j comme précédemment. Contrairement au cas de la théorie ϕ^4 infra-rouge abordée dans le paragraphe précédent, c'est le comportement ultra-violet aux grandes échelles $j \geq 0, j \rightarrow +\infty$ qui demande une attention particulière. Remarquons tout d'abord que l'aire de Lévy de B , $\mathcal{A}(s, t) = \int_s^t dB_1(t_1) \int_s^{t_1} dB_2(t_2)$, se décompose successivement en somme de plusieurs termes,

$$\mathcal{A}(s, t) = \mathcal{P}^+ \mathcal{A}(s, t) + \mathcal{P}^- \mathcal{A}(s, t), \quad (4.8)$$

où le projecteur de Fourier \mathcal{P}^\pm envoie $\phi_1 \otimes \phi_2$ sur $\frac{1}{2} \sum_j \phi_1^j \otimes \phi_2^j + \sum_{j \leq k} \phi_1^j \otimes \phi_2^k$; puis

$$\mathcal{P}^+ \mathcal{A}(s, t) = \mathcal{P}^+ \int_s^t dB_1(t_1) \int^{t_1} dB_2(t_2) - \mathcal{P}^+ \int_s^t dB_1(t_1) \int_s^s dB_2(t_2), \quad (4.9)$$

ⁿSa covariance dans l'espace direct s'écrit $\langle B_s B_t \rangle = \frac{1}{2}(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha})$.

les intégrales \int^{t_1} ou \int^s étant des *intégrales squelette* (données formellement par la multiplication par $\frac{1}{i\xi}$ en Fourier). On montre que le deuxième terme $\mathcal{P}^+ \int_s^t dB_1(t_1) \int^s dB_2(t_2) = \mathcal{P}^+(\phi_1(t) - \phi_1(s))\phi_2(s)$ est $2\alpha - \varepsilon$ -Hölder pour tout $\varepsilon > 0$. La partie singulière de l'aire de Lévy (singulière pour $\alpha \leq 1/4$ en tout cas) est donc donnée par les incréments de deux fonctions \mathcal{A}^\pm , de dérivée

$$\partial \mathcal{A}^+(t) := \mathcal{P}^+ \partial \phi_1(t) \phi_2(t) = \frac{1}{2} \sum_j \partial \phi_1^j(t) \phi_2^j(t) + \sum_{j < k} \partial \phi_1^j(t) \phi_2^k(t) \quad (4.10)$$

et similairement pour $\partial \mathcal{A}^-$ en échangeant les indices, de sorte que l'échelle du champ dérivé $\partial \phi$ soit inférieure à celle du champ non dérivé. On vérifie facilement que la transformée de Fourier de la fonction à deux points $\langle \partial \mathcal{A}^\pm(s) \partial \mathcal{A}^\pm(t) \rangle$ est donnée par le diagramme de Feynman “bulle” amputé de la Fig. 3, égal à peu de choses près à $\int_{|\xi_1| < |\xi - \xi_1|} \frac{d\xi_1}{|\xi_1|^{-1+2\alpha} |\xi - \xi_1|^{1+2\alpha}} \approx \int^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^{4\alpha}}$, et diverge donc si et seulement si $\alpha \leq 1/4$. On retrouve ainsi rapidement les résultats classiques de L. Coutin et Z. Qian [15].

Supposons dorénavant $\alpha < 1/4$. Pour aller plus loin, il est naturel de considérer les “wavy lines” extérieures comme propagateurs d'un champ gaussien $\sigma = (\sigma_+, \sigma_-)$ à deux composantes indépendantes, qu'on choisit de covariance Fourier $\langle |\hat{\sigma}_\pm(\xi)|^2 \rangle = \frac{1}{|\xi|^{1-4\alpha}}$ par homogénéité. On est donc conduit à introduire le lagrangien d'interaction

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = i\lambda(\partial \mathcal{A}^+(x)\sigma_+(x) + \partial \mathcal{A}^-(x)\sigma_-(x)). \quad (4.11)$$

Les dimensions des champs sont $-\alpha$ pour ϕ , 2α pour σ , et la constante de couplage $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ est sans dimension, de sorte que la théorie est *a priori* juste renormalisable. Les conditions très particulières sur les échelles dans les vertex (le champ dérivé $\partial \phi$ étant de *bas moment* par rapport au champ ϕ) impliquent que λ n'est pas renormalisée.^o Le comptage de puissance et les symétries de la théorie montrent que seuls les diagrammes à $2n$ propagateurs externes σ et 0 propagateur externe ϕ sont potentiellement divergents, de degrés de divergence $\omega_{2n} = 1 - 4n\alpha$. Pour $\alpha \in]1/4, 1/8[$ (hypothèse à laquelle nous nous tenons par la suite) seul le propagateur du champ σ (correspondant à $n = 1$) doit être renormalisé.

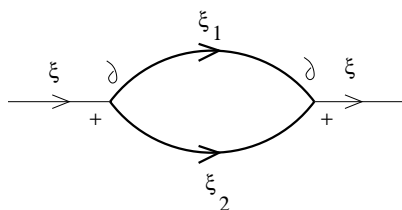


Fig. 3. Diagramme bulle.

^oEn effet, les diagrammes de Feynman avec trois propagateurs externes $\phi, \partial \phi, \sigma$ ne peuvent être des diagrammes dangereux au sens de la Sec. 1.

Des arguments perturbatifs naïfs font bien comprendre ce qui se passe. Le diagramme “bulle” diverge comme $(i\lambda)^2 M^{\rho(1-4\alpha)}$ pour un cut-off ultraviolet de l'ordre de M^ρ . La série géométrique associée à ce diagramme 1 P.I. donne pour le propagateur renormalisé du champ σ

$$\frac{1}{|\xi|^{1-4\alpha}} \left(1 - \lambda^2 \frac{M^{\rho(1-4\alpha)}}{|\xi|^{1-4\alpha}} + \dots \right) = \frac{1}{|\xi|^{1-4\alpha} + \lambda^2 M^{\rho(1-4\alpha)}},$$

tendant exponentiellement vite vers 0 quand $\rho \rightarrow \infty$. Le champ σ acquiert donc une masse δm de l'ordre de $M^{\rho(1-4\alpha)}$. Autrement dit, l'interaction disparaît à toutes les échelles lorsqu'on supprime le cut-off! Le champ ϕ reste donc gaussien, avec exactement la même fonction de covariance initiale. Cependant, la même série donne une covariance renormalisée $\langle |\mathcal{F}\partial\mathcal{A}^+(\xi)|^2 \rangle$ finie, égale à $\frac{M^{\rho(1-4\alpha)}}{1+\lambda^2(M^\rho/|\xi|)^{1-4\alpha}} \rightarrow_{\rho \rightarrow \infty} \frac{|\xi|^{1-4\alpha}}{\lambda^2}$, et redonnant après transformation de Fourier inverse une aire de Lévy de régularité Hölder $2\alpha - \varepsilon$.

Les arguments constructifs font apparaître une subtilité (insoupçonnable avec des arguments purement perturbatifs), liée au problème de la domination des champs σ moyennés de bas moment. Soit $b^j := ((\delta m)^{j-1} - (\delta m)^j)/\lambda^2$ le contre-terme de masse d'échelle j , divisé par le carré de la constante de couplage. Par un raisonnement similaire à celui utilisé pour la théorie ϕ^4 , chaque champ σ de bas moment produit à partir du vertex en $\lambda(\partial\mathcal{A})\sigma$ peut prendre l'ascenseur accompagné d'un petit facteur $O(\lambda^\kappa)$, où $\kappa < 1$. *A priori* il ne peut être dominé que par le contre-terme de masse en $\lambda^2 b^j \sigma^2$. Schématiquement $\lambda^\kappa \sigma e^{-\lambda^2 \sigma^2} = O(\lambda^{\kappa-1})$, un *grand facteur* au lieu du *petit facteur* souhaité. Afin de résoudre ce problème on est amené à rajouter un *terme de bord** dans l'interaction, qu'on peut choisir égal à $\mathcal{L}_{12} := M^{-(12\alpha-1)\rho} \lambda^3 (\sigma(x))^6$. Le préfacteur $M^{-(12\alpha-1)\rho}$ a été choisi de manière à ce que l'intégrale de $M^{-(12\alpha-1)\rho} (\sigma^\rho)^6$ sur un intervalle Δ^ρ soit de l'ordre de 1. Comme $12\alpha-1 > 0$, ce terme est en fait évanescant à toutes les échelles $j \ll \rho$. A ces échelles, la domination par le contre-terme $\lambda^2 b \sigma^2$ produit un facteur 1, multiplié par un petit facteur $M^{-\frac{1}{2}(1-4\alpha)(\rho-j)}$ dû à $b^j \sim M^{(1-4\alpha)j}$. Si au contraire $j \simeq \rho$ (“échelles de bord”), ce facteur vaut à peu près 1, et on domine alors par le terme de bord \mathcal{L}_{12} . Schématiquement, $\lambda \sigma^j e^{-M^{-(12\alpha-1)\rho} \lambda^3 (\sigma^j)^6} = O(\lambda^{\frac{1}{2}})$, que multiplie $M^{(12\alpha-1)(\rho-j)/6}$. En choisissant λ assez petit on arrive à obtenir un petit facteur à toutes les échelles. Il faut encore vérifier qu'on peut dominer les champs σ moyennés de bas moment issus de \mathcal{L}_{12} par \mathcal{L}_{12} lui-même. Les détails peuvent être trouvés dans [51].

References

1. A. Abdesselam, Explicit constructive renormalization, Ph.D. Thesis (1997).
2. A. Abdesselam and V. Rivasseau, *Trees, Forests and Jungles: A Botanical Garden for Cluster Expansions*, Lecture Notes in Physics, Vol. 446 (Springer, 1995).
3. A. Abdesselam and V. Rivasseau, An explicit large versus small field multiscale cluster expansion, *Rev. Math. Phys.* **9** (1997) 123–199.
4. A. Abdesselam and V. Rivasseau, Explicit fermionic tree expansions, *Lett. Math. Phys.* **44** (1998) 77–88.

5. J. Baez and J. Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, Series on Knots and Everything, Vol. 4 (World Scientific, 1994).
6. G. Benfatto, M. Cassandro, G. Gallavotti, F. Nicolò, E. Olivieri, E. Pressutti and E. Scacciatelli, On the ultraviolet stability in the Euclidean scalar field theories, *Commun. Math. Phys.* **71** (1980) 95–130.
7. G. Benfatto, G. Gallavotti and V. Mastropietro, Renormalization group and the Fermi surface in the Luttinger model, *Phys. Rev. B* **45** (1992) 5468–5480.
8. D. Bernard, K. Gawedzki and A. Kupiainen, Anomalous scaling in the N -point function of passive scalar.
9. J. Bricmont, K. Gawedzki and A. Kupiainen, KAM theorem and quantum field theory, *Commun. Math. Phys.* **201** (1999) 699–727.
10. C. Brouder, Runge–Kutta methods and renormalization, *Euro. Phys. J. C* **12** (2000) 521–534.
11. D. C. Brydges and T. Kennedy, Mayer expansion of the Hamilton–Jacobi equation, *J. Stat. Phys.* **49** (1987) 19–49.
12. E. Bacry and J. F. Muzy, Log-infinitely divisible multifractal processes, *Commun. Math. Phys.* **236** (2003) 449–475.
13. P. Cartier and C. DeWitt-Morette, Brydges’ operator in renormalization theory, in *Mathematical Physics and Stochastic Analysis*, eds. S. Albeverio *et al.* (World Scientific, 2000), pp. 165–168.
14. A. Connes and D. Kreimer, Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry, *Commun. Math. Phys.* **199** (1998) 203–242.
15. L. Coutin and Z. Qian, Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions, *Probab. Th. Relat. Fields* **122** (2002) 108–140.
16. B. Duplantier and S. Sheffield, Liouville quantum gravity and KPZ, arXiv:0808.1560.
17. *Constructive Quantum Field Theory, Proc. of the 1973 Erice Summer School*, eds. G. Velo and A. Wightman, Lecture Notes in Physics, Vol. 25 (Springer, 1973).
18. G. Falkovich, K. Gawedzki and M. Vergassola, Particles and fields in fluid turbulence.
19. L. Foissy and J. Unterberger, Ordered forests, permutations and iterated integrals, arXiv:1004.5208.
20. J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and R. Sénéor, Bounds on completely convergent Euclidean Feynman graphs, *Commun. Math. Phys.* **98** (1985) 273–288.
21. J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and R. Sénéor, Bounds on renormalized Feynman graphs, *Commun. Math. Phys.* **100** (1985) 23–55.
22. J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and R. Sénéor, Construction and Borel summability of infrared Φ_4^4 by a phase space expansion, *Commun. Math. Phys.* **109** (1987) 437–480.
23. J. Feldman, V. Rivasseau, J. Magnen and E. Trubowitz, An infinite volume expansion for many Fermions Green’s functions, *Helv. Phys. Acta* **65** (1992) 679.
24. U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge Univ. Press, 1995).
25. P. Friz and N. Victoir, *Multidimensional Dimensional Processes Seen as Rough Paths* (Cambridge Univ. Press, 2010).
26. G. Gallavotti, Invariant tori: A field theoretic point of view on Eliasson’s work, in *Advances in Dynamical Systems and Quantum Physics*, éd. R. Figari (World Scientific, 1995), pp. 117–132.
27. G. Gallavotti and K. Nicolò, Renormalization theory in 4-dimensional scalar fields, *Commun. Math. Phys.* **100** (1985) 545–590; **101** (1985) 247–282.
28. K. Gawedzki and A. Kupiainen, Massless lattice φ_4^4 theory: Rigorous control of a renormalizable asymptotically free model, *Commun. Math. Phys.* **99** (1985) 197–252.

29. J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics, A Functionnal Point of View* (Springer, 1987).
30. J. Glimm and A. Jaffe, Positivity of the φ_3^4 Hamiltonian, *Fortschr. Phys.* **21** (1973) 327–376.
31. J. Glimm, A. Jaffe and T. Spencer, The particle structure of the weakly coupled $P(\varphi)_2$ model and other applications of high temperature expansions: Part II. The cluster expansion, in *Constructive Quantum Field Theory* (Erice 1973), op. cit. [17].
32. N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Addison-Wesley, 1992).
33. M. Gubinelli, Controlling rough paths, *J. Funct. Anal.* **216** (2004) 86–140.
34. R. Gurau, J. Magnen and V. Rivasseau, Tree quantum field theory, arXiv:0807.4122.
35. B. Hambly and T. Lyons, Stochastic area for Brownian motion on the Sierpinski gasket, *Ann. Probab.* **26** (1998) 132–148.
36. K. Hepp, Proof of the Bogoliubov–Parasiuk theorem on renormalization, *Commun. Math. Phys.* **2** (1966) 301–326.
37. C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory* (Cambridge Univ. Press, 1989).
38. I. Karatzas and S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (Springer, 1991).
39. M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, *Lett. Math. Phys.* **66** (2003) 157–216.
40. A. Kupiainen and P. Muratore-Ginanneschi, Scaling, renormalization and statistical conservation laws in the Kraichnan model of turbulent advection.
41. S. Lando and A. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and Their Applications* (Springer, 2003).
42. M. Laguës and A. Lesne, *Invariance d'échelle. Des changements d'état à la turbulence* (Belin, 2003).
43. M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory* (Oxford Univ. Press, 1991).
44. A. Lejay, *An Introduction to Rough Paths*, Séminaire de Probabilités XXXVII, 1–59, Lecture Notes in Math., Vol. 1832 (Springer, 2003).
45. A. Lejay, Yet another introduction to rough paths, *Sém. Probab.* **1979** (2009) 1–101.
46. T. Lyons, Differential equations driven by rough signals, *Rev. Mat. Ibero.* **14** (1998) 215–310.
47. T. Lyons and Z. Qian, *System Control and Rough Paths* (Oxford Univ. Press, 2002).
48. T. Lyons and N. Victoir, An extension theorem to rough paths, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **24** (2007) 835–847.
49. J. Magnen and V. Rivasseau, Constructive ϕ^4 -theory without tears, arXiv:0706.2457.
50. J. Magnen and J. Unterberger, From constructive theory to fractional stochastic calculus. (I) An introduction: Rough path theory and perturbative heuristics, *Ann. Henri Poincaré* **12** (2011) 1199–1226.
51. J. Magnen and J. Unterberger, From constructive theory to fractional stochastic calculus. (II) The rough path for $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{4}$: Constructive proof of convergence, à paraître à, *Ann. Henri Poincaré*, arXiv:1103.1750.
52. J. Magnen and J. Unterberger, Renormalized rough paths: A stochastic differential equation approach, in preparation.
53. V. Mastropietro, *Non-Perturbative Renormalization* (World Scientific, 2008).
54. J. Magnen and D. Iagolnitzer, Weakly self avoiding polymers in four dimensions, *Commun. Math. Phys.* **162** (1994) 85–121.
55. J. Moore, *Lectures on Seiberg–Witten Invariants*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1629 (Springer, 1996).
56. E. Nelson, A quartic interaction in two dimensions, in *Mathematical Theory of Elementary Particles*, eds. R. Goodman and I. Segal (MIT Press, 1966).

57. D. Nualart, Stochastic calculus with respect to the fractional Brownian motion and applications, *Contemp. Math.* **336** (2003) 3–39.
58. R. Peltier and J. Lévy-Véhel, Multifractal Brownian motion: Definition and preliminary results, INRIA research report, RR-2645 (1995).
59. M. Peskine and D. Schröder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, 1995).
60. V. Rivasseau, *From Perturbative to Constructive Renormalization* (Princeton Univ. Press, 1991).
61. V. Rivasseau, F. Vignes-Tourneret and R. Wulkenhaar, Renormalization of noncommutative ϕ^4 -theory by multi-scale analysis, *Commun. Math. Phys.* **262** (2006) 565–594.
62. D. Ruelle, *Statistical Mechanics, Rigorous Results* (Benjamin, 1969).
63. M. Salmhofer, *Renormalization: An Introduction* (Springer, 1999).
64. H. Triebel, *Spaces of Besov–Hardy–Sobolev Type* (Teubner, 1978).
65. J. Unterberger, Stochastic calculus for fractional Brownian motion with Hurst parameter $H > 1/4$: A rough path method by analytic extension, *Ann. Probab.* **37** (2009) 565–614.
66. J. Unterberger, A central limit theorem for the rescaled Lévy area of two-dimensional fractional Brownian motion with Hurst index $H < 1/4$, arXiv:0808.3458.
67. J. Unterberger, A renormalized rough path over fractional Brownian motion, arXiv:1006.5604.
68. J. Unterberger, A rough path over multidimensional fractional Brownian motion with arbitrary Hurst index by Fourier normal ordering, *Stoch. Proc. Appl.* **120** (2010) 1444–1472.
69. J. Unterberger, Hölder-continuous paths by Fourier normal ordering, *Commun. Math. Phys.* **298** (2010) 1–36.
70. J. Unterberger, A Lévy area by Fourier normal ordering for multidimensional fractional Brownian motion with small Hurst index, arXiv:0906.1416.
71. F. Vignes-Tourneret, Renormalisation des théories de champs non commutatives, Thèse de doctorat de l’Université Paris 11, arXiv:math-ph/0612014.
72. A. S. Wightman, Remarks on the present state of affairs in the quantum theory of elementary particles, in *Mathematical Theory of Elementary Particles*, eds. R. Goodman and I. Segal (MIT Press, 1966).
73. K. G. Wilson, Renormalization group and critical phenomena. I. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture, *Phys. Rev. B* **4** (1971) 3174–3184.
74. K. G. Wilson and J. Kogut, The renormalization group and the ϵ expansion, *Phys. Rep.* **12** (1974) 75–200.
75. E. Wong and M. Zakai, On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals, *Ann. Math. Statist.* **36** (1965) 1560–1564.