二维拓扑场理论和镜像对称

范辉军

科学院报告，北京2014

I. 引言：2014年的菲尔兹奖

- 2014 四位菲尔兹奖获得者：
  - Artur Avila（巴西，动力系统）
  - Manjul Bhargava（印度，数论）
  - Martin Hairer（奥地利，随机微分方程）
  - Maryam Mirzakhani（伊朗，模空间与动力系统）
- Mirzakhani的工作:数亏格为g的单个黎曼面上长度不超过L简单闭测地线的个数。
- 渐进公式：$L^{6g-6}, L \to \infty$.
- 她的证明方法是计算曲线模空间上Weil-Peterson体积
- 她利用双曲几何的方法重新证明了Witten猜想
- Witten 关于曲线模空间的可积系统猜想是由Kontsevich于92年证明的。这也是他获得98年菲尔兹奖的最重要的工作

II-1. 曲线模空间

- 闭的定向的黎曼面是由唯一的拓扑量亏格g给定的。比如二维球面，环面，高亏格黎曼面
- 若把黎曼面视为光滑代数曲线，则它们的全体构成一个$3g-3$的代数簇$\mathscr{M}_g$，其中重要的一个紧化称为是Deligne-Mumford紧化$\overline{\mathscr{M}}_g$
- 在弦理论中，一个闭合曲线S^1或一个线段$[0,1]$代替了经典物理学中质点的概念，它们在时空中运动，相互作用所产生的轨迹就是（带边的）黎曼面
- 可以考虑带n个标记点的代数曲线$[\Sigma_g, p_1, \cdots, p_n]$,从而构成模空间$\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$.
- Gauss-Bonnet 定理$2-2g = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_g} KdV_{\Sigma}$给出了二维引力的作用泛函。

II-2. 曲线模空间的相交数

- 记$\psi_i, i = 1, \cdots, n$ 为Deligne-Mumford空间$\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$上第i个标记点给出的万有余切线丛的陈类. 记$\mathbf{t}(\psi) = t_0 + t_1\psi + t_2\psi^2 + \cdots$. 则一点遗传位势定义为

$$\mathscr{F}_g(\mathbf{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\overline{\mathscr{M}}_{g,n}} \mathbf{t}(\psi_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{t}(\psi_n),$$

相应的τ 函数为:

$$\tau(\hbar, \mathbf{t}) = \exp\left\{ \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{g-1} \mathscr{F}_g(\mathbf{t}) \right\}.$$

- $\mathscr{F}_g(\mathbf{t})$的展开系数就给出了相交数$\int_{\overline{\mathscr{M}}_{g,n}} \psi_1^{a_1} \cdots \psi_n^{a_n}$ （Correlation函数）
- 顶点算子:

$$\Gamma^{\pm} = \exp\left(\pm \sum_{k \geq 0} \frac{(2\lambda)^{k+1/2}}{(2k+1)!!} \frac{t_k}{\sqrt{\hbar}} \right) \exp\left(\mp \sum_{k \geq 0} \frac{(2k-1)!!}{(2\lambda)^{-k-1/2}} \sqrt{\hbar} \partial_{t_k} \right).$$

- 在Hirota双线性形式下，KdV方程簇可写为：

$$\mathrm{res}_{\lambda=\infty}\,\lambda^n \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\left(\Gamma^+\otimes\Gamma^- - \Gamma^-\otimes\Gamma^+\right)\tau\otimes\tau = 0, n \geq 0.$$

- KdV 方程是19世纪Korteweg和de Vries在研究水波传播时发现的偏微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = uu_x - \frac{1}{6}u_{xxx}.$$

- 引入更多变量后导出一个无穷多方程的KdV方程簇。

II-3. Virasoro约束

我们借助Givental的观察引入Virasoro算子。

- 无穷维辛空间$\mathscr{H} = H((1/z)) = H_+ \oplus H_-$, $\Omega(f,g) := \mathrm{res}(fg(-z))$.
- 无穷小辛变换的量子化: $\hat{A} := \hat{H}_A \; H_A := \frac{1}{2}\Omega(f, Af)$, 其中

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} q_k z^k + (-1)^{k+1} p_k z^{-k-1}.$$

- Virasoro 代数: 令$D = z(d/dz)z$，$L_m = z^{-1/2} D^{m+1} z^{-1/2}$. 则有显示的表达:

$$\begin{aligned} L_{-1} &= 1/z \\ L_0 &= z\frac{d}{dz} + \frac{1}{2} \\ L_1 &= z^3 \frac{d^2}{dz^2} + 3z^2 \frac{d}{dz} + \frac{3}{4} z \end{aligned}$$

- $L_m, m \geq -1$ 是无穷小辛变换满足如下关系:

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{n+m}.$$

- 量子化后，我们得到

$$\begin{aligned}
\hat{L}_{-1} &= q_0^2/2\hbar + \sum_{k\geq 0} q_{k+1}\partial_k \\
\hat{L}_0 &= \sum_{k\geq 0}(k+1/2)q_k\partial_k \\
\hat{L}_1 &= \hbar\partial_0^2/8 + \sum_{k\geq 0}(k+1/2)(k+3/2)q_k\partial_{k+1}
\end{aligned}$$

这些量子化后的算子$\hat{L}_m$满足Virasoro关系:

$$\begin{cases}
[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (n-m)\hat{L}_{m+n} & \text{unless } m, n = \pm 1 \\
[\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}] = 2(\hat{L}_0 + 1/16)
\end{cases} \tag{1}$$

II-4. Witten猜想

基于弦理论中矩阵模型的研究，91年Witten在他的文章中猜测：

Conjecture 0.1

曲线模空间所给出的τ 函数满足*Kdv* 方程簇与*Virasoro*约束

- 1992年M. Kontsevich证明这个猜想是对的，并且Virasoro约束唯一决定τ函数（在差一个常数因子下）。
- 进一步的推广？

II-5. 镜像对称现象

- 在研究弦理论中，理论物理学家发现要得到四维的现实理论，弦必须紧化到六维的卡-丘流形上。
- 一个n维的卡-丘流形是一个典则从平凡的Kähler流形
- 在80年代中对弦理论中T-对偶性的研究中，B. Greene and R. Plesser 发现了关于两个卡- 丘流形M 与$\check{M}$的Hodge数的对偶：

$$h^{3-p,q}(M) = h^{p,q}(\check{M})$$

.

- 91年，物理学家Candelas, dela Ossa, Green and Parks有一个重要的发现：可以通过求解某类微分方程得到一些卡-丘流形上有理曲线的个数

Candelas, dela Ossa, Green 和Parks的发现

- 记$X \subset \mathbb{CP}^4$ 为一般位置上的5次超曲面, 比如由多项式$x_1^5+x_2^5+\cdots+x_5^5$定义. 记n_d代表X上度为d 的有理曲线的个数. 一个从黎曼时代开始的问题就是计数n_d.
- 写出生成函数

$$K(Q) = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{n_d d^3 Q^d}{1 - Q^d}$$

他们重要的发现是这个函数可以通过求解以下4 阶Picard-Fuchs 得到：

$$D^4 + 5q(5D+1)(5D+2)(5D+3)(5D+4) = 0, D = q\frac{d}{dq}.$$

方法是:

(1) 注意到超几何函数$f_0(q) = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(5d)!q^d}{(d!)^5}$是其中的一个解。另一个解$f_1(q)$在0全纯且$f_1(0) = 0$. 记$Q(q) = q\exp(f_1(q)/f_0(q))$.

(2) 把以下以q为变元的Yukawa 3 微分形式重写为以Q为变量的形式：

$$\frac{5}{(1-5^5q)f_0(q)^2}(\frac{dq}{q})^{\otimes 3} \to K(Q)(\frac{dQ}{Q})^{\otimes 3}.$$

从而得到$K(Q)$.

- 在90年代中，Givental，Liu-Liang-Yau在多种情形下解决了这个（亏格0）的镜像对称猜想。

Givental的观察

解决这个猜想的实质是如何找到方程和解？

- Givental首先观察到等变上同调群的D-模结构，并通过以下找到 Heisenberg 代数在等变上同调群的表示：

$$p_i \to \hbar q_i \frac{\partial}{\partial q_i},\ q_i \to q_i^*$$

这个D-模结构给出了一个局部常值层, 局部的它是以下方程的解：

$$\hbar q_i \frac{\partial}{\partial q_i} f_\alpha = \sum_\beta d_{i\alpha}^\beta f_\beta, i = 1, 2, \cdots, k.$$

这样他就找到了相应的方程。

- 进一步，Givental发现这个方程可以通过对流形的小量子同调群做量子化得到。量子化后的方程称为量子微分方程. 而它的解可以由带指数因子的沿某些圈的振荡积分得到。

III-1. 辛结构（A模型方面）

问题：这些不变量和方程究竟从何而来？

通过长期研究，人们发现镜像对称现象反映了镜像流形之间辛结构与复结构之间的对应关系。

- 量子上同调群是对辛流形上一般上同调群卡积的量子修正
- 量子上同调群来自于对辛流形上伪全纯曲线模理论的研究，现在称为Gromov-Witten理论，它反映了辛拓扑。
- 在物理上，伪全纯曲线是非线性σ模型的真空态。非线性σ模型的运动方程的解就是从黎曼面到一个辛流形的调和映射方程。研究到卡-丘流形的非线性σ模型也称为卡-丘A模型。

III-2. 复结构（B模型方面）

- 另一方面，Picard-Fuchs equation 可以通过研究镜像流形的复结构形变理论得到。注意到标准5次曲面的镜像是消解后的Fermat型号的5次曲面$\check{X}$。它的Hodge数$h^{2,1}(\check{X}) = 1$因此通过研究周期积分和Gauss-Manin平坦联络可以得到Picard-Fuchs 方程。
- 关于卡-丘流形复结构形变的理论称为是卡-丘B模型，它对应着物理学家研究的所谓Kähler引力

IV-1. 伪全纯曲线与Gromov-Witten理论

- 流形M与上同调环$(H^*(M,\mathbb{R}),\wedge,\int_M)$
- 辛流形(M,ω,J)与量子上同调环：
  $(QH^*(M),\wedge_\hbar,\int_M)$. 其中乘法定义为计数过固定上同调类的伪全纯曲线
- 伪全纯曲线方程

$$u:(\Sigma,j)\to(M,\omega,J)$$
$$\bar{\partial}_J u := \frac{1}{2}(du + J\cdot du\cdot j) = 0$$

- 关于伪全纯曲线的理论称为Gromov-Witten theory。一般研究所谓稳定映射的模空间$\overline{\mathscr{M}}_{g,n}(M,A), A\in H_2(M,\mathbb{R})$。

- 1. Gromov首先研究伪全纯曲线的理论，并证明了不可压缩定理，开启了研究辛拓扑的大门。
  2. Witten，Kontsevich-Manin给出了公理化的描述。
  3. 阮勇斌第一个给出了GW不变量的形式定义。
  4. 阮-田首次在辛流形半单的情形下严格定义GW不变量。
- 对一般辛流形上GW不变量的定义由许多小组给出：Fukaya-Ono, Li-Tian, Ruan，Siebert 等.
- Virasoro 猜想: 光滑代数簇的GW不变量的生成函数应该满足一系列由Eguchi-Hori-Xiong 和Katz基于Virasoro约束给出的微分方程.
  1. 刘-田证明了亏格0的量子上同调的Virasoro猜想；Dubrovin-张证明了任何Frobenius流形亏格0的位势都满足Virasoro约束；
  2. Dubrovin-张对半单亏格1的情形证明了猜想；
  3. 刘小博对半单亏格2的情形证明了猜想；
  4. Pandharipande-Okounkov对椭圆曲线证明了猜想
  5. Givental对toric Fano情形证明了猜想
  6. Teleman对半单Frobenius流形证明了猜想

IV-2. 一个例子: $\mathbb{CP}^n$

- 上同调环由以下给出

$$H^*(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{C}[x]/(x^{n+1}),$$

其中x为超平面类。

- 量子上同调环为

$$QH^*(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{C}[q,p]/(p^{n+1} - q).$$

- 量子化: $p \to \hbar q \frac{\partial}{\partial q} = \hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $q \to q = e^t$. 量子微分方程为

$$\left((\hbar \frac{\partial}{\partial t})^{n+1} - e^t \right) F(t) = 0.$$

- 按Hori-Vafa构造，B模型不是一个流形而是对应LG模型：

$$f(z_1, \cdots, z_n) = z_1 + \cdots + z_n + \frac{q}{z_1 \cdots z_n}, \ q = e^t$$

振荡积分

$$F(q) = \int_\Gamma e^{f/\hbar} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$$

给出了量子微分方程的解.

V-1. 镜像对称与Landau-Ginzburg模型

- 不是所有的卡-丘流形都有着镜像对，比如存在刚性的卡-丘流形（$h^{2,1}(M) = 0$).
- 根据物理学家的工作，镜像对称现象超出了卡-丘流形的范畴，特别是与Landau-Ginzburg模型相关
- LG模型指完备非紧Kähler流形上的一个超位势全纯函数结构
- 事实上，物理学家使用LG模型计算拓扑场理论的历史更早，比如Gepner，Ceccoti, Vafa，Witten，Klemm等
- 物理学家早就发现LG模型与奇点理论之间的关系
- Witten在93年为了推广Witten猜想研究了r-spin曲线理论
- Givental在他的文章“Symplectic topology and singularity theory”中意识到GW理论与LG 模型之间的关系。

- 拓扑场理论最初是由Witten 在90年左右提出的。他这个观点被Atiyah, Segal等人提炼成公理化表述. 我们仅谈论二维的闭弦理论，这个公理体系可以更详细地由Manin-Kontsevich公理体系给出, 满足这个体系的理论称为是上同调场理论.

Definition 0.2 (CohFT)

CohFT 是一个结构$(H, (\cdot,\cdot), I, I_{g,n})$ 满足以下条件:

- 配对$(\cdot,\cdot)$非退化.
- $I_{g,n} : H^{\otimes n} \to H^*(\overline{\mathscr{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$是多重线性映射满足
  - $I_{g,n}(a_1, \cdots, a_n)$ 相应于$a_1, \cdots, a_n$是对称的.
  - 树图粘合: 记$b : \overline{\mathscr{M}}_{g',n'+1} \times \overline{\mathscr{M}}_{g'',n''+1} \to \overline{\mathscr{M}}_{g,n}$ 为粘合映射$(g' + g'' = g, n' + n'' = n)$, 则

$$b^*(I_{g,n}(a_1, \cdots, a_n)) = \sum_{\mu,\nu} I_{g',n'+1}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n'}}, \phi_\mu) g^{\mu\nu} I_{g'',n''+1}(a_{j_1}, \cdots, a_{j_{n''}}, \phi_\nu).$$

- 圈图粘合:
  - 记$b' : \overline{\mathscr{M}}_{g,n+2} \to \overline{\mathscr{M}}_{g+1,n}$ 为粘合映射, 则

$$(b')^*(I_{g+1,n}(a_1, \cdots, a_n)) = \sum_{\mu,\nu} I_{g,n+2}(a_1, \cdots, a_n, \phi_\mu, \phi_\nu) g^{\mu\nu}.$$

- 单位公理: $(a, b) = I_{0,3}(a, b, 1) \in H^*(\overline{\mathscr{M}}_{0,3}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Remark 0.3

等式$(a \circ b, c) = I_{0,3}(a, b, c)$为$(H, (\cdot, \cdot), \circ, 1)$提供了一个Frobenius代数结构. 若考虑$n$点函数则可导出Frobenius流形结构.

Example 0.4

辛流形X的虚拟基本圈$[\overline{\mathscr{M}}_{g,n}(X)]^{vir}$提供了一个CohFT:

$$I_{g,n} = \pi_*([\overline{\mathscr{M}}_{g,n}(X)]^{vir} \cap ev^*(\cdot)) : H^*(X) \to H^*(\overline{\mathscr{M}}_{g,n}, \mathbb{C}).$$

VI-1 r-spin曲线理论

- r-spin曲线：$(\mathscr{C}_g, \mathscr{L}, p_1, \cdots, p_k)$, 线丛$\mathscr{L}$ 满足r-spin条件：$\mathscr{L}^r \cong K_{\log}$.
- r-spin曲线的模空间$\overline{\mathscr{M}}_{g,k}^{1/r}$由等价类$[(\Sigma, \mathscr{L})]$给出.
- Witten的考虑: 推广Witten-Kontsevich定理
- 对A, D, E奇点提出广义的Witten猜想: 生成函数满足Drinfeld-Sokolov方程簇.
- 模空间理论和虚拟基本圈$[\overline{\mathscr{M}}_{g,k}^{1/r}]^{vir}$的构造由代数几何学家：Abramovich, Kimura, Vaintrob和Jarvis完成
- r-spin情形的Witten猜想在亏格0时由Jarvis-Kimura-Vaintrob, 亏格1和2时由Y.P Lee解决。06-07年，Faber, Shadrin以及Zvonkine解决一般情形。

(1) 位势函数与对称性

Definition 0.5

$W(x_1, \cdots, x_N)$称为拟齐次多项式，如果它满足如下条件

$$W(\lambda_1^{q_1} x_1, \cdots, \lambda_N^{q_N} x_N) = \lambda W(x_1, \cdots, x_N),$$

其中q_i是变量x_i的度数.

W是非退化的，如果它满足

(1) W不包含$x_i x_j i \neq j$以及

(2) W所定义的超曲面在投影空间中是非奇异的

Theorem 0.6 (K. Saito)

若W是拟齐次多项式, 则度数$q_i \leq \frac{1}{2}$且唯一确定.

量子奇点理论的一个关键估计是以下定理

Theorem 0.7 (Fan-Jarvis-Ruan, CPAM 2008)

设$W \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$是非退化的拟齐次多项式，且对任何变元$x_i, i = 1,\dots,N$，度数$q_i = \mathrm{wt}(x_i) < 1$. 则对任何$(u_1,\dots,u_N) \in \mathbb{C}^N$以下估计成立

$$|u_i| \le C\left(\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial W}{\partial x_i}(u_1,\dots,u_N)\right| + 1\right)^{\delta_i},$$

其中$\delta_i = \frac{q_i}{\min_j(1-q_j)}$，常数$C$仅依赖$W$自身. 若对任何$i \in \{1,\dots,N\}$，$q_i \le 1/2$, 则对任何$i \in \{1,\dots,N\}$ $\delta_i \le 1$. 若对任何i, $q_i < 1/2$, 则对任何i,$\delta_i < 1$.

Proof.

利用代数几何和矩阵分析的方法. □

Lemma 0.8

若W非退化,则对角对称群

$$G_W := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{C}^*)^N \mid W(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_N x_N) = W(x_1, \dots, x_N)\}$$

是有限的.

Definition 0.9

标记$\gamma \in G_W$为

$$\gamma = (\exp(2\pi i \Theta_1^\gamma), \dots, \exp(2\pi i \Theta_N^\gamma)),$$

with $\Theta_i^\gamma \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

$$J := (\exp(2\pi i q_1), \dots, \exp(2\pi i q_N)),$$

循环群$\langle J \rangle$在整个理论中将扮演一个重要的角色.

(2) W结构与W-曲线

Definition 0.10

轨曲线$(\mathscr{C}, p_1, \cdots, p_k)$: 在标记点$p_i$或奇点处允许有轨形结构; 其坐标系由$z \to z^{m_i}$给出; 局部群为$G_{p_i} \cong Z_{m_i}$.
若$\mathscr{L}$为轨形线丛，(z, s)为其靠近p_i的局部坐标, 则G_{p_i}的作用为$(z, s) \to (\exp(2\pi i/m_i)z, \exp(2\pi i v/m_i)s)$. 同理我们可以定义在二重奇点处的轨形结构

Definition 0.11

$\mathfrak{C} = (\mathscr{C}, p_1, \cdots, p_k, \mathscr{L}_1, \cdots, \mathscr{L}_N, \varphi_1, \cdots, \varphi_s)$是一条$W$曲线，由以下要素构成：本身为具有$k$个标记点的亏格$g$的轨形$\mathscr{C}$, 并带$W$-结构$(\mathscr{L}_1, \cdots, \mathscr{L}_N, \varphi_1, \cdots, \varphi_s)$. 一个$W$结构是由满足同构要求的$N$个轨形线丛$\mathscr{L}_1, \cdots, \mathscr{L}_N$构成：

$$\varphi_i : W(\mathscr{L}_1, \cdots, \mathscr{L}_N) \to K_{log} = K_{\mathscr{C}} \otimes (\mathscr{O}(p_1)) \otimes \cdots (\mathscr{O}(p_k)), \forall i = 1, \cdots, s.$$

(3)宽线丛与窄线丛

- 若线丛$\mathscr{L}_i$ 在一个标记点（或奇点）p的轨形结构是平凡的, 即$\Theta_i^\gamma = 0$, 则$\mathscr{L}_i$称为在p是宽线丛; 否则它在p点称为窄线丛.
- 若所有的线丛在一个标记点（或奇点）p都是窄线丛，则p称为是窄点，否则它称为是宽点.
- 取$\gamma \in G$为局部群在p的生成元, 则它诱导了$\mathbb{C}^N$上的作用并有不动点集$\mathbb{C}^N_\gamma$. 定义$W_\gamma = W|_{\mathbb{C}^N_\gamma}$。
- 我们需要轨形结构来处理线丛在奇点处的退化性

(4) W-曲线的模空间

- $\overline{\mathscr{M}}_{g,k} := \{(\mathscr{C}, p_1, \cdots, p_k)\}$: 带$k$个标记点的曲线的模空间
- $\overline{\mathscr{W}}_{g,k}(\gamma) := \{(\mathfrak{C})\}$: W-曲线$\mathfrak{C}$的模空间.这是一个分层空间

自然映射

$$st : \overline{\mathscr{W}}_{g,k}(\gamma) \to \overline{\mathscr{M}}_{g,k}\ ,(\text{遗忘映射})\theta : \overline{\mathscr{W}}_{g,k+1,W}(\gamma, J) \to \overline{\mathscr{W}}_{g,k}(\gamma)$$

以及其他的粘合操作

taughtological ring in $H^*(\overline{\mathscr{W}}_{g,k}(\gamma))$. ψ_i, κ_i 类等.

Theorem 0.12

For any non-degenerate, quasi-homogeneous polynomial W, the stack $\overline{\mathscr{W}}_{g,k}$ is a smooth, compact orbifold (Deligne-Mumford stack) with projective coarse moduli. In particular, the morphism $st : \overline{\mathscr{W}}_{g,k} \to \overline{\mathscr{M}}_{g,k}$ is flat, proper and quasi-finite (but not representable).

(5) 刚性W曲线的模空间

$\overline{\mathscr{W}}_{g,k}(\gamma)$不是一个适合分析操作的工作空间, 我们需要考虑刚性的W 曲线空间$\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma)$. 它是$\overline{\mathscr{W}}_{g,k}(\gamma)$的分支覆盖空间.

Definition 0.13

在一个标记点p 处的刚性化ψ是一个保持W-结构的局部平凡化, 即它保持以下交换的图表:

$$\begin{tikzcd} j_p^*\left(\bigoplus_{m=1}^{N} \mathscr{L}_m\right) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi_\ell \circ W_\ell"'] & {[\mathbb{C}^N/G_p]} \arrow[d, "W_\ell"] \\ j_p^*(K_{log}) \arrow[r, "residue"] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{2}$$

其中求余数的映射把$\frac{dz}{z}$映为1.

Definition 0.14

一个刚性化W-曲线定义为组合$\mathfrak{C} := \{\mathscr{C}, p_1, \cdots, p_k, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_N, \varphi_1, \cdots, \varphi_s, \psi_1, \cdots, \psi_k\}$，其中$\psi_i$为在标记点$p_i$的刚性化. 刚性化$W$-曲线的模空间是$\mathfrak{C}$的等价类, 记为$\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma)$.

(6) Witten映射与它的扰动

度量选取: 在标记点或奇点附近取圆柱度量，即让$|\frac{dz}{z}| = 1$. 通过W-结构这个度量会诱导$\mathscr{L}_i$上的度量.

设$\mathfrak{C} = (\mathscr{C}, \mathscr{L}, \Psi)$为带圆柱度量的刚性的$W$-曲线. 我们可以定义保度量映射:

$$\tilde{I}_1 : \Omega(\tilde{\Sigma}, \bar{\mathscr{L}}_j^{-1} \otimes \Lambda^{0,1}) \to \Omega(\tilde{\Sigma}, \mathscr{L}_j \otimes \Lambda^{0,1}).$$

此时轨形曲线上的Witten方程定义为

$$\widetilde{WM}(\mathfrak{C}, \mathbf{u}) := \bar{\partial} u_i + \tilde{I}_1\left(\overline{\frac{\partial W}{\partial u_i}}\right) = 0, \forall i = 1, \cdots, N.$$

- $\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma)$模空间上分层轨形Fréchet从$B^0$和$B^{0,1}$: 在$\mathfrak{C}$点的纤维空间分别为:

$$C^\infty(\mathscr{C},\mathscr{L}_j) := \{(u_{j,\nu}) \in \oplus_\nu C^\infty(\mathscr{C}_\nu,\mathscr{L}_j) | u_{j,\nu}(p_\nu) = u_{j,\mu}(p_\mu), \text{ if } \pi_\nu(p_\nu) = \pi_\mu(p_\mu)\}$$

$$C^\infty(\mathscr{C},\mathscr{L}_j \otimes \Lambda^{0,1}) := \{(u_{j,\nu}) \in \oplus_\nu C^\infty(\mathscr{C}_\nu,\mathscr{L}_j \otimes \Lambda^{0,1})\}.$$

于是Witten映射$\widetilde{WM}$可视为从流形B^0到从$\pi^* B^{0,1}$上的截面.

困难之处:

- 在轨形的坐标卡表示下, Witten映射是G-等变的.
- W是高度退化的Hamilton函数
- 不能直接扰动$\widetilde{WM}$

（7）扰动Witten映射作为多重截面

我们可以在标记点或奇点处扰动Witten方程使得它有如下形式：

$$\bar{\partial} u_i + \tilde{I}_1\left(\overline{\frac{\partial W + W_{0,\gamma}}{\partial u_i}}\right) = 0, \text{若} u_i \text{ 为宽变量.}$$

其中$W_{0,\gamma}$为W_γ的线性扰动使得$W_{0,\gamma} + W_\gamma$是一个全纯Morse函数. 扰动依赖于扰动参数$\bar{b} = (b_1, \cdots, b_N)$.

因为扰动会破坏G-等变性, 扰动截面$WI : B^0 \to B^{1,0}$是一个多重截面！

- 在二重奇点p处的扰动参数应该满足相容性条件.
- 通过单位分解定义$\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}$ 上的扰动的整体多重截面.

（8）扰动Witten方程的非线性分析

注记: 这是一个非保角的非线性柯西-黎曼方程. 所以此处的分析不同于4d的Yang-Mills方程以及伪全纯曲线方程. 它的分析也不同于Seiberg-Witten方程, 因为SW方程的解具有C^0-模估计从而模空间是紧的.

靠近标记点处，它类似于辛几何中Floer理论的轨道流线方程, 但在内部它是一个半线性椭圆方程。

- **内估计**: $\|\mathbf{u}\|_{C^k} \leq C$.(利用关键的Lemma 0.3)
- **在标记点或奇点附近的收敛性**: $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_N) \to \kappa_i z \to p$, 其中$\kappa_i$是函数$W_\gamma + W_{0,\gamma}$的某个临界点.
- **指数收敛性**

(9) 孤立子空间

考虑$(\mathbb{R}^1\times S^1,-\infty,0,+\infty,\gamma,*,\gamma^{-1},\psi)$上的方程. (圆柱坐标：$\zeta=s+i\theta$)

$$\frac{\bar{\partial}u_i}{\partial\bar{\xi}}-2\overline{\frac{\partial(W+W_{0,\gamma})}{\partial u_i}}=0.$$

Definition 0.15

其上的非平凡解称为**孤立子解**, 若孤立子解不依赖角度则称为BPS-孤立子.

注记: BPS孤立子是S^1-不变的解(因此会在模空间中带来锥形结构).

若$\mathbf{u}$ 为一个解，则有

$$(W_\gamma+W_{0,\gamma})(\kappa^-)-(W_\gamma+W_{0,\gamma})(\kappa^+)=2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{S^1}\sum_i\left|\frac{\partial(W+W_{0,\gamma})}{\partial u_i}\right|^2.$$

结论:

仅当我们选取γ的扰动参数$\bar{b}$恰恰好，使得$W_\gamma + W_{0,\gamma}$的两个不同的临界点κ^+和κ^- 满足以下等式

$$\mathrm{Im}(W_\gamma + W_{0,\gamma})(\kappa^i) = \mathrm{Im}(W_\gamma + W_{0,\gamma})(\kappa^j).$$

时，才存在孤立子解.

Definition 0.16

若扰动参数$\bar{b}$使得对任何$\gamma \in G$, $W_\gamma + W_{0,\gamma}$都是Morse函数,则扰动称为是正则扰动；若对正则扰动$\bar{b}$, 对任意的γ上述等式都不成立, 则称扰动为强正则的。

Theorem 0.17

正则但不是强正则的参数$\bar{b}$构成了有限个实超曲面中的一般集；这些超曲面把参数空间$\mathbb{C}^N$隔成不连通的房间.

（10）稳定W截面的模空间$\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma,\varkappa)$

失紧现象: 若模空间$\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k,W}(\gamma,\varkappa)$是强正则扰动的, 则没有失紧现象发生. 若扰动是正则但非强正则, 则有失紧现象发生。发生的原因是由于孤立子解的存在性。

为了获得紧空间，我们必须在已有模空间中添加"**孤立子W 截面**"。所以我们必须考虑更大的空间$\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig,s}}_{g,k}(\gamma,\varkappa)$.

- $\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig,s}}_{g,k}(\gamma,\varkappa)$是一个分层空间，其中分层的序由标记对偶图给出.
- 我们可以赋予$\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig,s}}_{g,k}(\gamma,\varkappa)$以Gromov-Hausdorff拓扑从而得到一个紧的Hausdorff空间.

- 若$\overline{\mathscr{W}}^{\text{rig,s}}_{g,k}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varkappa}) = \overline{\mathscr{W}}^{\text{rig}}_{g,k}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varkappa})$ (强正则扰动), 则它是一个不带边的空间.
- 若扰动是正则但非强正则的,则$\overline{\mathscr{W}}^{\text{rig,s}}_{g,k}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varkappa})$ 是一个带边的空间，且边与BPS 孤立子有关. 孤立子但不是BPS 孤立子出现在模空间的内部，因为其自同构群是有限的。

（11）Fredholm理论和虚拟维数

对任何$\mathfrak{C} \in \overline{\mathscr{W}}^{\text{rig}}_{g,k}(\boldsymbol{\gamma})$ 我们有Witten映射:

$$WI_{\mathfrak{C}} : L^p_1(\mathscr{C},\mathscr{L}_1 \times \cdots \times \mathscr{L}_N) \to L^p(\mathscr{C},\mathscr{L}_i \otimes \Lambda^{0,1}), p > 2$$

$$WI_{\mathfrak{C}}(\mathbf{u}) = (\bar{\partial}_{\mathscr{C}} u_1 + \tilde{I}_1\left(\overline{\frac{\partial(W + W_{0,\beta})}{\partial u_1}}\right), \cdots, \bar{\partial}_{\mathscr{C}} u_N + \tilde{I}_1\left(\overline{\frac{\partial(W + W_{0,\beta})}{\partial u_N}}\right)).$$

在$\mathbf{u}$点，我们有线性化算子：

$$D_{\mathfrak{C},\mathbf{u}}WI : L_1^p(\mathscr{C},\mathscr{L}_1 \times \cdots \times \mathscr{L}_N) \to L^p(\mathscr{C},\mathscr{L}_1 \otimes \Lambda^{0,1}) \times \cdots L^p(\mathscr{C},\mathscr{L}_N \otimes \Lambda^{0,1})$$

$$D_{\mathfrak{C},\mathbf{u}}WI(\boldsymbol{\phi}) := D_{\mathfrak{C},\mathbf{u}}WI(\phi_1,\cdots,\phi_N) :=$$

$$\left(\bar{\partial}_{\mathscr{C}}\phi_1 + \sum_j \tilde{I}_1\left(\overline{\frac{\partial^2(W+W_{0,\beta})}{\partial u_1 \partial u_j}\phi_j}\right),\cdots,\bar{\partial}_{\mathscr{C}}\phi_N + \sum_j \tilde{I}_1\left(\overline{\frac{\partial^2(W+W_{0,\beta})}{\partial u_N \partial u_j}\phi_j}\right)\right).$$

- 宽标记点和窄标记点对指标有不同的贡献!

Theorem 0.18

设$(\mathfrak{C},\mathbf{u}) \in \overline{\mathscr{W}}_{g,k}^{\mathrm{rig,s}}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varkappa})$和假定$\mathfrak{C}$是连通的. 则其线性化算子$D_{\mathfrak{C},\mathbf{u}}WI$: $L_1^p(\mathscr{C},\mathscr{L}_1 \times \cdots \times \mathscr{L}_N) \to L^p(\mathscr{C},\mathscr{L}_1 \otimes \Lambda^{0,1}) \times \cdots \times L^p(\mathscr{C},\mathscr{L}_N \otimes \Lambda^{0,1})$ 是一个实的*Fredholm* 算子，指标为

$$2\hat{c}_W(1-g) - \sum_\tau 2\iota(\gamma_\tau) - \sum_{\tau=1}^{k} N_{\gamma_\tau}$$

其中$\hat{c}_W = \sum_i(1-2q_i)\iota(\gamma_\tau) = \sum_i(\Theta_i^{\gamma_\tau} - q_i)$以及$N_{\gamma_\tau} = \dim \mathbb{C}_{\gamma_\tau}^N$.

（12）定向的Kuranishi结构与虚拟基本圈

基于Fukaya-Ono关于GW不变量的工作。

- 注记: 有其他的类似的构造方法，如李骏-田刚, 阮勇斌, Siebert, Hofer,陈柏辉....
- **内部Kuranishi邻域的构造**: $(U_\sigma, E_\sigma, s_\sigma, \Psi_\sigma)$. 由隐函数定理和先验估计(没有横截性)
- **边界Kuranishi邻域的构造**: 仔细分析BPS孤立子解及其上的障碍丛结构(分为数形和圈形两种).
- **粘合** 把Kuranishi邻域按从低层到高层的顺序粘合起来。
- **定向** 证明此Kuranishi 结构是可定向的。

(13) 虚拟圈

- 基于Fukaya-Ono的Kuranishi结构理论,若扰动是强正则的，则我们可以得到虚拟基本圈$[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varkappa})]^{vir} \in H_*(\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varkappa}))$，其实维数为$6g-6+2k-2D-\sum_{i=1}^k N_{\gamma_i} = 2((\hat{c}_W-3)(1-g)+k-\sum_{\tau=1}^k \iota(\gamma_\tau)) - \sum_{i=1}^k N_{\gamma_i}$.
- 我们可以对任何点缀对偶图Γ，定义边界类$[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\Gamma)]^{vir}$.
- 若两个扰动参数$\bar{b}$和$\bar{b}'$ 落在$\mathbb{C}^N$中同一个房间中, 则它们定义的虚拟基本圈是一样的. 因此基本圈依赖于$W_\gamma+W_{0,\gamma}$的消灭圈（或Lefschetz手指）

（14）量子Picard-Lefschetz理论:穿墙公式

若取一条道路$\bar{b}(\lambda)$穿过墙壁, 则基本圈的变化与相应扰动位势的消灭圈（或Lefschetz手指）的变化一致，即它们也满足经典奇点理论中的Picard-Lefschetz理论.

设$(b_1(\lambda), \cdots, b_{N_{\tilde{\gamma}}}(\lambda)), \lambda \in [-1, 1]$为$\mathbb{C}^{N_{\tilde{\gamma}}}$中的一般的穿墙道路.

记$\{\kappa^1(\pm), \cdots, \kappa^i(\pm), \kappa^{i+1}(\pm), \cdots, \kappa^{\mu_{N_{\tilde{\gamma}}}}(\pm)\}$ 为在$\lambda = \pm 1$的有序临界点集.

我们不妨假定

- 对$j \neq i$，$\kappa^j(\pm) = \kappa^j$固定
- $\kappa^i(\pm) = \kappa^i(\lambda = \pm 1)$
- $\mathrm{Im}(\alpha^i(\lambda = 0)) = \mathrm{Im}(\alpha^{i+1})$.

- 若扰动满足Re$\alpha^i(\lambda) < \mathrm{Re}\alpha^{i+1}$, 则有左变换公式:

$$[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^j(+))]^{vir} = [\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^j(-))]^{vir},\ \forall j \neq i, i+1$$

$$[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^i(+))]^{vir} = [\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^{i+1}(-))]^{vir} +$$

$$R_{i,i+1}\cdot[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k,W}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^i(-))]^{vir}$$

$$[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^{i+1}(+))]^{vir} = [\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^i(-))]^{vir},$$

其中$R_{i,i+1}$为经典Picard-Lefschetz理论中的相交数.

- 若扰动满足Re$\alpha^i(\lambda) > \mathrm{Re}\alpha^{i+1}$, 则有右变化公式:

$$[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^j(+))]^{vir} = [\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^j(-))]^{vir},\ \forall j \neq i, i+1$$

$$[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^i(+))]^{vir} = [\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^{i+1}(-))]^{vir},$$

$$[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^{i+1}(+))]^{vir} = [\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^i(-))]^{vir} +$$

$$R_{i,i+1}\cdot[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k,W}(\gamma',\tilde{\gamma};\varkappa',\kappa^{i+1}(-))]^{vir}$$

(15) 虚拟圈$[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\boldsymbol{\gamma})]^{vir}$的定义

- 固定$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$. 取强扰动的模空间$\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa})$.
- 对每个$\gamma \in G$. 取对应于函数$W_\gamma + W_{0,\gamma}$临界点的基$\{S_j^-(\gamma), j = 1, \cdots, \mu_\gamma\} \in H_{N_\gamma}(\mathbb{C}^N_\gamma, (W\gamma + W_{0,\gamma})^{-\infty}, \mathbb{Q})$以及对偶基
$\{S_j(\gamma), j = 1, \cdots, \mu_\gamma\} \in H_{N_\gamma}(\mathbb{C}^N_\gamma, (W_\gamma + W_{0,\gamma})^{\infty}, \mathbb{Q})$.
- 则每个组合$\left(S^-_{j_1}(\gamma_1), \cdots, S^-_{j_k}(\gamma_k)\right)$对应着$k$个临界点,
$\boldsymbol{\varkappa}_{j_1\cdots j_k} := \left(\kappa^-_{j_1}(\gamma_1), \cdots, \kappa^-_{j_k}(\gamma_k)\right)$.
- 我们有虚拟圈

$$[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\Gamma; \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}_{j_1\cdots j_k})]^{vir} =: [\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\Gamma; \boldsymbol{\gamma}, S^-_{j_1}(\gamma_1), \cdots, S^-_{j_k}(\gamma_k))]^{vir}$$

.

- 现在固定强扰动参数(b_i^0); Gauss-Manin联络提供了同构:

$$GM_{(b_i^0)} : H_{N_\gamma}(\mathbb{C}^N_\gamma, (W\gamma + W_{0,\gamma})^{\pm\infty}, \mathbb{Q}) \to H_{N_\gamma}(\mathbb{C}^N_\gamma, (W_\gamma)^{\pm\infty}, \mathbb{Q})$$

利用此同构我们可以同一化

$$H_{N_\gamma}(\mathbb{C}^N_\gamma, (W\gamma + W_{0,\gamma})^{\pm\infty}, \mathbb{Q}) \cong H_{N_\gamma}(\mathbb{C}^N_\gamma, (W_\gamma)^{\pm\infty}, \mathbb{Q}).$$

定义

$$\left[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}(\Gamma)\right]^{vir} := \sum_{j_1,\cdots,j_k} \left(\left[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\Gamma; \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}_{j_1\cdots j_k})\right]^{vir} \otimes \prod_{i=1}^{k} S_{j_i}(\gamma_i) \right)$$

$$\in H_*(\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\Gamma)) \otimes \prod_{\tau\in T(\Gamma)} H_{N_{\gamma_\tau}}(\mathbb{C}^N_{\gamma_\tau}, W^\infty_{\gamma_\tau}, \mathbb{Q})$$

由穿墙公式可知

Proposition 0.19

虚拟圈$\left[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}(\Gamma)\right]^{vir}$不依赖于基$\{S_{j_i}(\gamma_i)\} \in H_{N_\gamma}(\mathbb{C}^N_\gamma, (W_\gamma)^{\pm\infty}, \mathbb{Q})$在每个标记点$p_i$的选取.

（16）虚拟圈$[\overline{\mathscr{W}}_{g,k}(\gamma)]^{vir}$的定义

定义

$$[\overline{\mathscr{W}}(\Gamma)]^{vir} := \frac{1}{\deg so_\Gamma}(so_\Gamma)_*[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}(\Gamma)]^{vir},$$

其中

$$so_\Gamma : \overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}(\Gamma) \to \overline{\mathscr{W}}(\Gamma)$$

为软化映射. 特别的，我们有

$$[\overline{\mathscr{W}}_{g,k}(\gamma)]^{vir} := \frac{1}{\deg so}(so)_*[\overline{\mathscr{W}}^{\mathrm{rig}}_{g,k}(\gamma)]^{vir}.$$

注：我们可以选取允许群$G : \langle J\rangle \leq G \leq G_W$,
从而定义虚拟圈$\overline{\mathscr{W}}_{g,k,G}(\gamma), \overline{\mathscr{W}}_G(\Gamma)$.

(17) 量子奇点理论体系(FJRW理论)

- 极大对角对称群W: $G_W := \mathrm{Aut}(W)$.
- 指数分次元$J = \mathrm{diag}(e^{2\pi i q_1}, \cdots, e^{2\pi i q_N})$.
- 允许群G: $\langle J\rangle \le G \le G_W$.
- Lefschetz手指空间的轨形化与分次:
  1. 对任何$\gamma \in G$, 记$\mathbb{C}_\gamma^N$ 为γ的不动点集, N_γ 表示复维数, $W_\gamma := W|_{\mathbb{C}_\gamma^N}$ 为限制在γ的不动点集上的奇点。
  2. γ-扭转部分: $\mathscr{H}_\gamma := H^{N_\gamma}(\mathbb{C}_\gamma^{N_\gamma}, W_\gamma^\infty, \mathbb{C})^G$..
  3. $\gamma = (e^{2\pi i\Theta_1^\gamma}, \ldots, e^{2\pi i\Theta_N^\gamma}) \in G$ 的度数平移数: $\iota_\gamma := \sum_i(\Theta_i^\gamma - q_i)$.
  4. 度数$\mathscr{H}_\gamma$: $\deg_{\mathbb{C}}(\alpha) := \deg_W(\alpha)/2 := \deg(\alpha)/2 + \iota_\gamma$.
  5. 维数等式: $\deg_{\mathbb{C}}(\alpha) + \deg_{\mathbb{C}}(\beta) = \hat{c}_W$， 对任何$\alpha \in \mathscr{H}_\gamma, \beta \in \mathscr{H}_{\gamma^{-1}}$.
  6. 奇点W/G的状态空间:
  $$\mathscr{H}_{W,G} = \bigoplus_{\gamma\in G} \mathscr{H}_\gamma.$$
- $\mathscr{H}_{W,G}$ 中的配对$\langle , \rangle$定义为以下配对的直和
$$\langle , \rangle_\gamma : \mathscr{H}_\gamma \otimes \mathscr{H}_{\gamma^{-1}} \to \mathbb{C}$$
其中$\langle , \rangle_\gamma$为奇点W_γ的相交配对。

对任何齐次元素$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\alpha_i \in \mathscr{H}_{\gamma_i}$, 映射$\Lambda_{g,k}^{W,G} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{H}_W^{\otimes k}, H^*(\overline{\mathscr{M}}_{g,k}))$定义为

$$\Lambda_{g,k}^{W,G}(\alpha) := \frac{|G|^g}{\deg(st)} PD\, st_* \left(\left[\overline{\mathscr{W}}_{g,k,G}(\gamma) \right]^{vir} \cap \prod_{i=1}^{k} \alpha_i \right),$$

然后再线性扩张到$\mathscr{H}_{W,G}^{\otimes k}$中任何元素上. 公式中的$PD$为Poincare对偶映射.

Theorem 0.20

$(\mathscr{H}_{W,G}, \langle\, ,\rangle, \{\Lambda_{g,k}^{W,G}\}, \mathbf{e}_1)$构成一*CohFT*. 特别地，若$W_1$和$W_2$为具不同变元的两个奇点, 则$W_1 + W_2$的*CohFT*为$W_1$ 和W_2的*CohFT* 的张量积:

$$(\mathscr{H}_{W_1+W_2, G_1\times G_2}, \{\Lambda_{g,k}^{W_1+W_2, G_1\times G_2}\}) = (\mathscr{H}_{W_1,G_1} \otimes \mathscr{H}_{W_2,G_2}, \{\Lambda_{g,k}^{W_1,G_1} \otimes \Lambda_{g,k}^{W_2,G_2}\}).$$

奇点W/G的量子不变量由以下多点函数给出:

- $$\langle \tau_{l_1}(\alpha_1), \ldots, \tau_{l_k}(\alpha_k) \rangle_g^{W,G} := \int_{[\overline{\mathscr{M}}_{g,k}]} \Lambda_{g,k}^{W,G}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \prod_{i=1}^{k} \psi_i^{l_i},$$

  其中ψ_i 是$\overline{\mathscr{M}}_{g,k}$中tautological环的典则类.
- 亏格g的位势函数:

  $$\mathscr{F}_{g,W,G} = \sum_{k \geq 0} \langle \tau_{l_1}(\alpha_{i_1}), \ldots, \tau_{l_n}(\alpha_{i_n}) \rangle_g^{W,G} \frac{t_{i_1}^{l_1} \cdots t_{i_s}^{l_n}}{n!}$$

- 生成函数:

  $$\mathscr{D}_{W,G} = \exp\left(\sum_{g \geq 0} \hbar^{2g-2} \mathscr{F}_{g,W,G}\right)$$

Corollary 0.21

亏格*0*的理论定义了*Frobenius*流形的结构.

FJRW环：W/G的小量子环结构。是一个Frobenius代数结构，由状态空间，配对和乘法★构成. 乘法由以下亏格0的3点函数定义：

$$\langle \alpha \bigstar \beta, \gamma \rangle = \langle \tau_0(\alpha), \tau_0(\beta), \tau_0(\gamma) \rangle_0^{W,G}.$$

(18) FJRW环的计算

- 对ADE奇点, Fan-Jarvis-Ruan证明了Witten的自对偶镜像对称猜想

Theorem 0.22

(1) 除了n为奇数时的D_n奇点, 其它的简单奇点（*ADE*奇点）的量子环$\mathscr{H}_{W,\langle J \rangle}$都同构于相应奇点的*Milnor*环$\mathscr{Q}_W$.

(2) 带极大对角对称群G_{D_n}的量子环$\mathscr{H}_{D_n,G_{D_n}}$同构于$W = x^{n-1}y + y^2$的*Milnor*环$\mathscr{Q}_{A_{2n-3}}$.

(3) 奇点$W = x^{n-1}y + y^2$ $(n \geq 4)$的量子环$\mathscr{H}_{W,G_W}$同构于D_n的*Milnor*环$\mathscr{Q}_{D_n}$.

到目前为止有许多关于量子环以及Frobenius流形结构计算的文章。大部分与LG-LG镜像对称，CY/LG对应有关。

（19）广义Witten猜想的解决

为了推广Witten-Kontsevich定理，Witten提出了以下猜想：

Conjecture 0.23 (Witten的ADE可积系统猜想)

带对称群$\langle J\rangle$的*ADE*奇点的τ函数应该满足*Drinfeld-Sokolov*方程簇。

A奇点情形在2006-2007年间被Farber-Shadrin-Zvonkine完全解决。
对于DE奇点我们有下列定理从而完全解决此种情形的广义Witten猜想。

Theorem 0.24 (Fan-Jarvis-Ruan)

设n为偶数，则$n \geq 4$时的D_n 奇点以及E_6, E_7, *and* E_8奇点所有的带对称群$\langle J\rangle$的τ 函数满足相应的*Kac-Wakimoto/Drinfeld-Sokolov*方程簇。

然而令人惊讶的是n为奇数时D_n 奇点的Witten猜想并不正确。注意n为偶数时, $\langle J\rangle$是极大对称群G_{D_n}指标2的子群。当n为奇数时，$\langle J\rangle = G_{D_n}$. 我们有

Theorem 0.25

(1) $\forall n > 4$ 带极大对称群G_{D_n}的D_n奇点的τ函数满足A_{2n-3}奇点的*Kac-Wakimoto/Drinfeld-Sokolov*方程簇.

(2) $\forall n \geq 4$ 带极大对角对称群的奇点$W = x^{n-1}y + y^2$ 的τ函数满足D_n-*Kac-Wakimoto/Drinfeld-Sokolov*方程簇.

（20）广义Witten猜想的证明

1. ADE奇点的ancestor函数在量子奇点理论一方（A模型）有特殊的性质：是形式变量的多项式
2. 利用重建定理无论是在A模型一边还是B模型Givental量子化一边，ancestor函数完全由亏格0上的Frobenius流形的主位势（primary potential）决定，此处用到ADE奇点满足中心荷条件：$\hat{c}_W < 1$.
3. 利用WDVV方程证明主位势函数完全由$2, 3$点函数和基本4点函数确定.
4. 在FJRW理论一边，利用Topological Euler class 公理计算3点函数和基本4 点函数．在B模型一边用Noumi-Yamada公式计算余数，选取好的Primitive形式建立A模型和B模型之间的镜像对应。

(21) 量子奇点理论的重要文章(Fan-Jarvis-Ruan)

1. Geometry and analysis of spin equations, Comm. Pure Appl. Math. Vol. LXI,0745-0788(2008), 44 Pages
2. Witten equation and virtual fundamental cycle, arXiv:math /0712.4025v3, *108 pages*, ”FJRW Theory” book in preparation
3. Witten quation, mirror symmetry and quantum singularity theory, Annals of Mathematics, Vol 178 (2013), 1-106
4. D_4 Integrable Hierarchies Conjecture, arxiv: 1008.0927v1,19 Pages.
5. Quantum Singularity Theory For A_{r-1} and r-Spin Theory, Annales De L Institut Fourier, Tome,no.7,2781-2802 2011

VII-1. 整体镜像对称图像

- 顶层结构: $\mathcal{N} = (2,2)$超对称保角代数的非线性表示？（Hori-Vafa方法）.
- 整体镜像对称的图像:

$$\begin{tikzcd}
\text{CY A model} \arrow[r, "\text{mirror to}"'] \arrow[d, "\text{CY/LG corresp.}"] & \text{CY B model} \arrow[d, "\text{CY/LG corresp.}"] \\
\text{LG A model} \arrow[r, "\text{mirror to}"'] & \text{LG B model}
\end{tikzcd}$$

- 已知理论
  - CY A 模型: GW theory
  - CY B 模型: Kontsevich-Barannikov (亏格0); BCOV, holomorphic anomaly; Fang-Lu-Yoshikawa (亏格1情形) ;Costello-Li重整化方法.
  - LG A 模型: 量子奇点理论(FJRW 理论)
  - LG B 模型: 奇点理论和K. Saito平坦结构(g=0);半单Frobenius流形的Givental量子化方法; 范微分几何的方法; C. Li-S. Li-Saito的多重矢量场方法

VII-2. 奇点理论与辛几何

注意到投影空间中卡-丘光滑超曲面的整体定义函数给出了一个拟齐次的多项式，因此它对应一个由此定义的LG理论. 这类奇点具有整数的中心荷$\hat{c}_W = N-2$. 在90年代早期, 物理学家Martinec-Vafa-Warner-Witten 提出了以下著名的猜想：

Conjecture 0.26 (Landau-Ginzburg/Calabi-Yau 对应)

一般的拟齐次的多项式$W/\mathrm{Aut}(W)$所决定的*LG*理论应该等价于相应的卡-丘非线性σ模型。

在这个方面取得了许多重要的进展：如在Chiodo-阮的以下文章中

Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence of quintic three-fold via symplectic transformation, Preprint arXiv:0812.4660，Invent. Math.

他们证明了5次Fermat型多项式的FJRW理论的亏格0的位势函数是相应卡-丘3维超曲面上GW位势函数的解析延拓。

VII-3. 规范线性σ模型的研究

在90年代早期，Witten提出了用规范线性σ模型来研究整体镜像对称和LG/CY对应的途径。这涉及到几何不变量理论（GIT），动量映射和辛商，规范理论等。Witten的这个方法没有引起人们充分的重视，直到LG A理论被建立后，才引起了许多数学家的注意，现在有许多组研究人员朝建立统一理论的目标进发。主要的方程如下，称为规范Witten方程

$$\begin{cases} \bar{\partial}_A u + X_{W,\bar{\sigma}}(u) = 0 \\ *F_A + \mu(u) - \tau = 0 \end{cases}$$

其中$(A,\psi) \in W^{1,p}_{loc}\mathscr{A}(P) \times W^{1,p}_{loc,G}(P,F), \psi = (u,\bar{u})$. $P \to \mathscr{C}$为G-主丛，F为一G作用的Kähler流形，W为F上的G-不变全纯函数。

注：范-Jarvis-Ruan从12年开始对这个问题就进行了研究，并在各种场合做了一系列报告，我们已得到分析和代数不变量的结果，将在近期发布。（同时的有李骏-张怀良的工作）

VII-4. 量子奇点理论研究的最新进展

- 不变量构造的代数方法：Polischuk-Vaintrob，李骏-张怀良，李骏-李卫平-张怀良
- 相交数递归关系：刘克锋-徐浩，刘-Vakil-徐，Pandharipande-Pixton，刘小博-王欣
- 量子环的计算，LG-LG镜像对称：Krawitz，范，沈烨锋，Milanov，阮，Iritani
- LG/CY对应：Chiodo-阮
- 可积系统：张友金，刘思齐，阮，Milanov

VII-5. 二维拓扑场理论存在的重要问题（闭弦A理论）

- 问题1: 完成构造各种完整的理论. B模型方面: 建立高亏格不变量，解释全纯反常，找到新的拟模型式。
- 问题2: 建立完备相交奇点的FJRW理论.
- 问题3: 对5次超曲面建立证明CY/LG对应的完整理论，并推广到其他流形
- 问题4: 建立规范线性σ模型的严格数学理论，并证明CY/LG对应
- 问题5: 用微分几何的方法构造镜像对称流形（现有方法是用离散组合的方法）
- 问题6: 计算多点函数，证明生成函数满足Viraso约束, 甚至其他约束，比如W-代数.
- 问题7: 在更高层次上解释镜像对称现象，比如用范畴化理论.

VIII-1. 形变理论和B模型

- CY B模型方面：BCOV对三维卡丘流形形变理论的研究：Barannikov-Kontsevich对高维的进一步推广（利用延展的模空间）;解析torsion不变量；master方程等与Hodge结构的形变，周期映射等相关；近期由Costello-李思发展一套重整化方法进行处理. 完整的理论还未知。
- LG B模型: 奇点理论，K. Saito的平坦结构；Givental对半单Frobenius流形的形式量子化方法；(Teleman的唯一性定理).
- 我在下文中提出了研究LG B模型的另一种方法: 利用微分几何考虑薛定谔方程的形变理论

  H.Fan, Schrödinger equation, deformation theory and tt^*-geometry, arXiv: 1107.1290v1, *114 pages.*

Initial data:

- (M, g): 有有界几何的非紧完备的Kähler流形
- $F = zf$ 是定义在平凡丛$M \times \mathbb{C} \to M$上的截面,$z$可视为纤维坐标.

Definition 0.27

$(M \times \mathbb{C} \to M, g, F)$ 称为Kähler 型截面-丛系统

仅考虑(M, g, f)，并要求:

- f 称为强驯服的(strongly tame)，若: $|\partial f|^2(z) - C|\nabla\partial f|(z) \to \infty$ for any $C > 0$ as $d(z, z_0) \to \infty$.
- 初始数据: 强驯服的截面-丛系统(M, g, f).
- 驯服性: f称为驯服的, 若$|\partial f|(z) \geq C > 0$，当$d(z, z_0) \to \infty$，其中$C$为某个常数。

强驯服系统的例子

- W是欧氏空间$\mathbb{C}^n$上的非退化拟齐次多项式。则$(\mathbb{C}^n, W)$是一个强驯服的系统。

Example 0.28

定义在$\mathbb{C}^5$上的5次多项式$W(x_1, \cdots, x_5) = x_1^5 + \cdots + x_5^5$.

- f 为一个定义在环面$(C^*)^n$ 上的非退化且方便的Laurent多项式，环面带度量$g = \sum_i \frac{dz_i}{z_i} \wedge \overline{\frac{dz_i}{z_i}}$. 则$((\mathbb{C}^*)^n, g, f)$ 是强驯服的。

Example 0.29

以下Laurent多项式

$$f(z_1, \cdots, z_n) = z_1 + \cdots z_n + \frac{1}{z_1 \cdots z_n}$$

是投影空间$\mathbb{P}^n$的镜像对.

(a).形式薛定谔算子的微分几何

- (M,g)上常见算子: $\partial, \bar\partial, *, \Delta = \bar\partial\bar\partial^\dagger + \bar\partial^\dagger\bar\partial, \Box = dd^\dagger + d^\dagger d, L, \Lambda, F$.
- 扭转算子: $\bar\partial_f = \bar\partial + \partial f\wedge, \partial_f = \partial + \overline{\partial f}\wedge, \Delta_f = \bar\partial_f\bar\partial_f^\dagger + \bar\partial_f^\dagger\bar\partial_f, \Box_f = d_f d_f^c + d_f^c d_f$.
- 复的形式laplace算子$\Delta_f : \Omega^p \to \Omega^p$有以下局部表示：

$$\Delta_f = \Delta + (g^{\bar\mu\nu}\nabla_\nu f_l \iota_{\partial_{\bar\mu}} dz^l \wedge + \overline{g^{\bar\mu\nu}\nabla_\nu f_l \iota_{\partial_{\bar\mu}} dz^l \wedge}) + |\nabla f|^2. \tag{3}$$

- 若ψ是一个函数，则方程$\Delta_f\psi = 0$ 是复函数的标量薛定谔方程:

$$\Delta\psi + |\nabla f|^2\psi = 0. \tag{4}$$

Theorem 0.30

算子$L,\Lambda,F,\Box_f,\partial_f,\bar{\partial}_f^\dagger$ 形成一个$N=2$超对称代数:

- 偶部分: 算子L,Λ,F 生成$sl(2,\mathbb{R})\cong spin(3)$ 以及$\Box_f$生成$u(1)\cong so(2)$;
- 奇算子$\partial_f,\bar{\partial}_f^\dagger$ 生成Spinor表示S.
- 对偶表示S^*由$\bar{\partial}_f,\partial_f^\dagger$生成.
- 配对由以下给出

$$[\partial_f,\partial_f^\dagger]=\frac{1}{2}\Box_f,\ [\bar{\partial}_f,\bar{\partial}_f^\dagger]=\frac{1}{2}\Box_f.$$

(c). 谱理论

- The sobolev 模, Hilbert空间，laplace算子Δ_f的自伴扩张。

主要定理:

Theorem 0.31

设(M,g)为具有界几何的*Kähler* 流形. 若$\{(M.g),f\}$ 为强驯服的截面-丛系统, 则形式*laplace*算子Δ_f有纯粹的离散谱，所有的特征形式构成希尔伯特空间$L^2(\Lambda^\bullet(M))$中的一组正交基.

Remark 0.32

此定理表明从几乎所有的超曲面形变理论中出来的多项式所给出的形式薛定谔算子有纯粹的点谱。

(d). Hodge理论

设考虑的截面-丛系统(M,g,f)为强驯服的. 则有谱定理可得以下一系列结果

Theorem 0.33

存在正交分解

$$L^2\Lambda^k = \mathscr{H}^k \oplus \mathrm{im}(\bar\partial_f) \oplus \mathrm{im}(\bar\partial_f^\dagger) \tag{5}$$

$$\ker\bar\partial_f = \mathscr{H}^k \oplus \mathrm{im}(\bar\partial_f). \tag{6}$$

特别地，我们有同构

$$H^*_{((2),\bar\partial_f)}(M) \cong \mathscr{H}^*,$$

其中$\mathscr{H}^k$表示调和k 形式的空间.

e). Hard Lefschetz 定理

Theorem 0.34 (Hard Lefschetz theorem)

有同构

$$L^k : H^{n-k}_{((2),\bar{\partial}_f)} \simeq H^{n+k}_{((2),\bar{\partial}_f)}, \ 1 \le k \le n. \tag{7}$$

及分解

$$H^k_{((2),\bar{\partial}_f)} = PH^k_{((2),\bar{\partial}_f)} \oplus L \cdot PH^{k-2}_{((2),\bar{\partial}_f)} \oplus L^2 \cdot PH^{k-4}_{((2),\bar{\partial}_f)} \cdots . \tag{8}$$

Theorem 0.35

设M 为完备非紧的*Stein*流形，则有

$$
\begin{aligned}
H^k_{\bar{\partial}_f} &= \oplus_{0\le p\le k} Gr^p H^k_{\bar{\partial}_f} = \oplus_{0\le p\le k} H^{k-p}_{\partial f\wedge}(\Omega^p) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{if } k < N \\ \Omega^N/df\wedge\Omega^{N-1}, & \text{if } k = N, \end{cases}
\end{aligned}
$$

关于$\bar{\partial}_f$ L^2上同调群，我们有如下结论

Theorem 0.36

设(M,g)为具有有界几何的*Kähler stein*流形，(M,g,f) 为强驯服的且f是*Morse*的. 则有同构:

$$
\mathscr{H}^k \simeq H^k_{((2),\bar{\partial}_f)} = \begin{cases} 0, & \text{if } k < N \\ \Omega^N(M)/df\wedge\Omega^{N-1}(M), & \text{if } k = N. \end{cases} \tag{9}
$$

Definition 0.37

令$F: M\times S\to\mathbb{C}$为$f: M\to\mathbb{C}$的形变. 它称为是强形变若以下条件成立：($记f_t = F(\cdot,t)$):

1. $\sup_{t\in S}\mu(f_t) < \infty$.
2. 对任何$t\in S$, f_t是强驯服的.

形变参数空间S 是一个被$\mu(f_t)$的Milnor数分层的分层空间.

Theorem 0.38

非退化拟齐次多项式的任何相对和*Marginal*形变都是强形变。

设形变具有如下形式$F(z,t) = f(z) + \sum_{j=1}^{r} t_j g_j$, 其中$g_j$ 为f的Milnor环中次数不超过f的度数的生成元.

(h). 形变的稳定性

目标: 建立相应的量对参数的光滑依赖性. 必须对薛定谔方程做估计

- Sobolev模, 嵌入定理等.
- 先验估计，存在性与正则性
- 谱的连续性.
- 特征函数的指数衰减

Theorem 0.39 (稳定性)

设G_t为Δ_t的Green函数，$t\in S$为参数. 若(M,g,f_t)为(M,g,f)在S上的强形变, 则G_t 对t是C^∞可微算子。

Hilbert bundle

- 平凡的复Hilbert丛$\Lambda^*_{\mathbb{C}} = L^2\Lambda^* \times (\mathbb{C}^* \times S) \to (\mathbb{C}^* \times S)$ Hermitian 度量为:

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_M \alpha \wedge *\bar{\beta}.$$

- 对任何$(\tau, t) \in U_{(\tau_0, t_0)}$, 我们可以选取一致有界的特征形式$\{\alpha_a(\tau, t)\}_{a=1}^{\infty}$ of $\Delta_{\tau f_t}$ 使得它们构成$L^2\Lambda^k(M)$中的一组完备正交基，设特征值有以下序:

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots .$$

- 度量:

$$g_{a\bar{b}} = g_{a\bar{b}}(\tau, t) = g(\alpha_a, \alpha_b).$$

- 联络:

$$(\Gamma_i)_{a\bar{b}} = g(\partial_i \alpha_a, \alpha_b) = g_{c\bar{b}}(\Gamma_i)_a^c$$
$$(\Gamma_{\bar{i}})_{a\bar{b}} = g(\partial_{\bar{i}} \alpha_a, \alpha_b) = g_{c\bar{b}}(\Gamma_{\bar{i}})_a^c.$$
$$(\Gamma_\tau)_{a\bar{b}} = g(\tau\partial_\tau \alpha_a, \alpha_b), \text{and } (\Gamma_{\bar{\tau}})_{a\bar{b}}$$

$$D_i := \partial_i - \Gamma_i,\ D_{\bar{i}} := \bar{\partial}_i - \Gamma_{\bar{i}},\ D_\tau = \partial_\tau - \frac{1}{\tau}\Gamma_\tau,\ D_{\bar{\tau}} = \partial_{\bar{\tau}} - \frac{1}{\bar{\tau}}\Gamma_{\bar{\tau}}.$$

- $$D = \sum_i dt^i D_i + d\tau D_\tau,\ \bar{D} = \sum_i d\bar{t}^i D_{\bar{i}} + d\bar{\tau} D_{\bar{\tau}}. \tag{10}$$
- D 为Hermitian 联络g
- 实结构$\tau_{\mathbb{R}}$: $\tau_{\mathbb{R}} \cdot \alpha_a = M_{\bar{a}}^b \alpha_b = M_{\bar{a}}^{\bar{b}} \alpha_{\bar{b}}$. $DM \equiv 0$.

(j). Hodge 丛, Higgs 场B 及同态$\mathscr{U}$

- Hodge丛$\mathscr{H} \to (\mathbb{C}^* \times S)$, $\mathscr{H}_t$ 是由$\Delta_{\tau f_t}$中素调和形式生成的. $\mathscr{H}$ 是一个光滑丛。
- 定义张量$B_i, \bar{B}_i := B_{\bar{i}}, \mathscr{U}_\tau, \mathscr{U}_{\bar{\tau}}$:

$$(B_i)_{a\bar{b}} = ((\partial_i f)\alpha_a, \alpha_b),\ (B_{\bar{i}})_{a\bar{b}} = ((\overline{\partial_i f})\alpha_a, \alpha_b) \tag{11}$$

$$\mathscr{U}_{\tau a\bar{b}} = g(f\alpha_a, \alpha_b),\ \mathscr{U}_{\bar{\tau} a\bar{b}} = g(\bar{f}\alpha_a, \alpha_b) \tag{12}$$

- Higgs 场为矩阵值1-形式:

$$B = \sum_{i=1}^{\mu} B_i dt^i,\ \bar{B} = \sum_{i=1}^{\mu} B_{\bar{i}} dt^{\bar{i}}. \tag{13}$$

Proposition 0.40

联络D_i及算子B_i 满足*Cecotti-Vafa*方程*(tt^* 方程)*,即模掉$\mathscr{H}^{\perp}$有:

$$
\begin{aligned}
&D_{\bar{i}}B_j = D_iB_{\bar{j}} = 0,\ D_iB_j = D_jB_i,\ D_{\bar{i}}B_{\bar{j}} = D_{\bar{j}}B_{\bar{i}} \\
&[D_i, D_j] = [D_{\bar{i}}, D_{\bar{j}}] = [B_i, B_j] = [B_{\bar{i}}, B_{\bar{j}}] = 0 \\
&[D_i, D_{\bar{j}}] = -[B_i, B_{\bar{j}}].
\end{aligned}
$$

- $\nabla_i = D_i + B_i, \bar{\nabla}_i = D_{\bar{i}} + B_{\bar{i}}$
- 联络:

$$
\nabla_t : \mathscr{H} \to \mathscr{H} \otimes \Lambda^1(T^*S),\ \nabla_{\bar{t}} : \mathscr{H} \to \mathscr{H} \otimes \Lambda^1(\overline{T^*S})
$$

由以下定义

$$
\nabla_t = \sum_i dt^i \wedge \nabla_i,\ \nabla_{\bar{t}} = \sum_i d\bar{t} \wedge \bar{\nabla}_i,\ \mathscr{D}_t = \nabla_t + \nabla_{\bar{t}}
$$

Theorem 0.41

算子$D_i, D_\tau, B, \mathscr{U}_\tau$ 满足以下关系(称为”奇妙方程“), 即模掉 $\mod \mathscr{H}^\perp$后有,

$$
\begin{aligned}
&(1)\ [D_i, \mathscr{U}_\tau] + [B_i, \tau D_\tau] = 0,\ [D_{\bar{i}}, \bar{\mathscr{U}}_\tau] + [B_{\bar{i}}, \bar{\tau} D_{\bar{\tau}}] = 0\\
&(2)\ [D_i, \bar{\mathscr{U}}_\tau] = 0,\ [D_{\bar{i}}, \mathscr{U}_\tau] = 0\\
&(3)\ [\bar{\tau} D_{\bar{\tau}}, B_i] = [\tau D_\tau, B_{\bar{i}}] = 0,\\
&(4)\ [B_i, \mathscr{U}_\tau] = 0,\ [B_{\bar{i}}, \bar{\mathscr{U}}_\tau] = 0\\
&(5)\ [\tau D_\tau, D_{\bar{i}}] = -[\mathscr{U}_\tau, B_{\bar{i}}],\ [\bar{\tau} D_{\bar{\tau}}, D_i] = -[\bar{\mathscr{U}}_\tau, B_i]\\
&(6)\ [\tau D_\tau, D_i] = [\bar{\tau} D_{\bar{\tau}}, D_{\bar{i}}] = 0\\
&(7)\ [\tau D_\tau, \bar{\mathscr{U}}_\tau] = [\bar{\tau} D_{\bar{\tau}}, \mathscr{U}_\tau] = 0\\
&(8)\ [\tau D_\tau, \bar{\tau} D_{\bar{\tau}}] = -[\mathscr{U}_\tau, \bar{\mathscr{U}}_\tau]
\end{aligned}
$$

(I).Hodge丛上的联络$\mathscr{D}$

- $$\nabla_\tau = d\tau \wedge (D_\tau - \frac{\mathscr{U}_\tau}{\tau}), \ \nabla_{\bar\tau} = d\bar\tau \wedge (D_{\bar\tau} - \frac{\bar{\mathscr{U}}_\tau}{\bar\tau}), \ \mathscr{D}_\tau = \nabla_\tau + \nabla_{\bar\tau} \tag{14}$$

- $$\nabla := \nabla_t + \nabla_\tau, \ \bar\nabla := \nabla_{\bar t} + \nabla_{\bar\tau}, \ \mathscr{D} = \nabla + \bar\nabla. \tag{15}$$

Theorem 0.42 (tt^*几何)

$\mathscr{D}$是*Hodge*丛$\mathscr{H} \to \mathbb{C}^* \times S$上近乎平坦联络,即$\mathscr{D}^2 = 0, \mod \mathscr{H}^\perp$ 或等价的

$$\nabla^2 = \bar\nabla^2 = [\nabla, \bar\nabla] = 0, \quad \mod \mathscr{H}^\perp. \tag{16}$$

- 借助Hodge理论，我们可以解方程$\mathscr{D}\cdot s=0$,得到周期矩阵: 即基本解矩阵$\Pi=(\Pi_1,\cdots,\Pi_\mu)$.
- Π的第一个行向量Π_1有如下形式：

$$\Pi_1=\begin{pmatrix}\tau^{\frac{n}{2}-1}\int_{\Gamma_1}e^{\tau f_t+\overline{\tau f_t}}dz^1\wedge\cdots dz^n\\ \vdots\\ \tau^{\frac{n}{2}-1}\int_{\Gamma_\mu}e^{\tau f_t+\overline{\tau f_t}}dz^1\wedge\cdots dz^n\end{pmatrix}$$

  我们称之为"初始矢量", 因为$\Pi_j=\partial_j\Pi_1,\forall j=2,\cdots,\mu$.
- 若$\dim S=m=\mu$, 则有同构$\hat{\Pi}:TS\to\mathscr{H}$

$$X\to\iota_X(B)\cdot\Pi_1.$$

- 通过这个同构我们可以把所有的结构从$\mathscr{H}$拉到TS, 令$\bar{\tau}\to 0$,则得到TS上的Frobenius流形结构.

(m). 热核展开以及奇点的解析torsion不变量

与方浩合作，我们得到如下结果：设W 为$\mathbb{C}^n$ 上满足$q_M - q_m < 1/3$的拟齐次多项式, 则有：

1. $t \to 0$时，$e^{-t\Delta_f}$的热核展开存在
2. $\bar{\partial}_f$的指标公式成立，使得Milnor数可以表示为$\mathbb{C}^n$上的Gauss型积分.
3. 可以定义Δ_f的p 次Zeta函数和p 次解析torsion不变量.
4. 大部分时候1次Zeta函数为0.
5. z^2的2次torsion不变量是$\zeta_R'(-1)$. 这是LG模型的BCOV型torsion不变量.

VIII-3. 问题

- 问题1: 与奇点理论中的其他理论进行比较, 比如K.Saito的primitive形式，Hertling的TERP结构, 振荡积分等.
- 问题2: 与CY几何中的周期积分进行比较.
- 问题3: 比较$g = 1$时的Torsion不变量（CY/LG对应）
- 问题4: 利用某种重整化技巧建立高亏格不变量：费曼图，传播子.
- 问题5: 考虑超出拟齐次多项式或Laurent多项式的系统.
- 问题6: 更一般的截面-丛系统

IX. 拓扑场理论中的问题和展望

- 不变量构造之争：Kuranishi结构对Polyfold结构
- 开弦理论的构造：Fukaya范畴；复流形上凝聚层的导出范畴；矩阵因子化（matrix facterization）;LG模型；同调镜像对称猜测与Sheridan的工作
- LG模型与扭结理论
- 2维模型与高维规范理论

谢谢关注!

2014年11月5日中科院数学与系统研究院