

# 数与形

-----一个说不尽的话题

中科院数学所 葛力明

数: 1, 2, 3 . . .

形: 点  $\cdot$ , 线  $\text{——}$ , 面 

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

序“ $<$ ”:  $0 < 1 < 2 < 3 \dots \rightarrow +$

数+运算  $\longrightarrow$  数学

运算:  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ ,  $\dots$

# 数的发展:

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \dots$$

群, 环, 域, 代数, ...

数 + 运算 = 代数

**代数结构：** 子结构，理想，交换，  
非交换，...

**基本问题：** 分类 + 表示

**例：**  $(\mathbb{N}, +)$  的结构由“1”决定

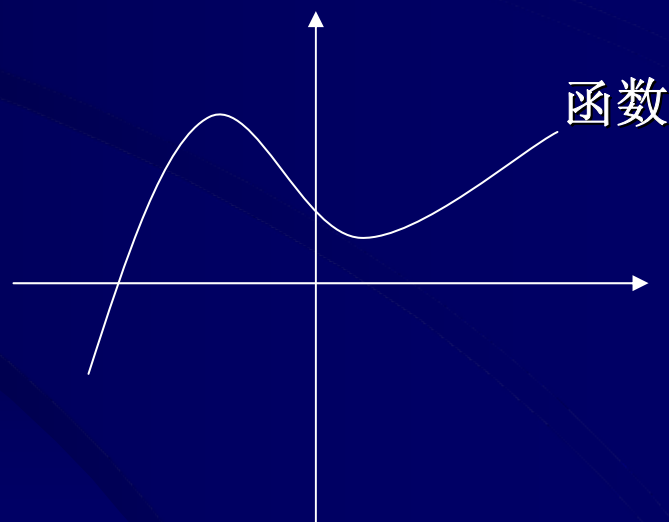
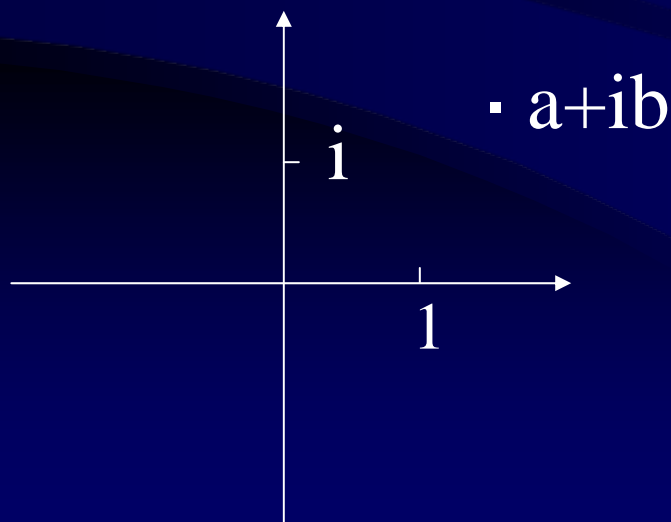
$(\mathbb{N}, \times)$  的结构由“素数”决定

# 数与形的(第一次)结合:

坐标系的产生:



数 = 点, 数系 = 线、面, ...



目的：代数中的几何

几何中的代数

# 数中的形:

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{Z} = S^1$$

$$\hat{\mathbb{Z}} = \{ \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \text{所有特征} \}$$

$$= \{ \theta: n \rightarrow e^{2n\theta\pi i}, 0 \leq \theta < 1 \}$$

$$= \{ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \}$$

任意代数的“形”是什么?

特例:  $\mathbb{R}[x_1 \cdots, x_n] \leftrightarrow \mathbb{R}^n,$   
 $\mathbb{C}[x_1 \cdots, x_n] \leftrightarrow \mathbb{C}^n, \dots$

# 分析的进入:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}\mathbb{Z} \subset l^1(\mathbb{Z}) \subset C^*(\mathbb{Z}) \subset L(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \dots$$

$\parallel$                    $\parallel$                    $\parallel$                    $\parallel$                    $\parallel$

$$S^1 \subset \mathbb{C}[z]_{S^1} \subset R(S^1) \subset C(S^1) \subset L^\infty(S^1) \subset L^2(S^1) \subset \dots$$

“ $\cong$ ”  $\leftrightarrow$  Fourier 变换

$$\widehat{C(S^1)} = S^1 \quad \text{极大理想空间}$$

$$R(S^1)^* = L^\infty(S^1)$$



几何上的分析:

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad u_t : x \rightarrow x - t$$

$$\left. \frac{d}{dt} u_t \right|_{t=0} = \frac{d}{dx}$$

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{d}{dx}\right) = 2\pi i \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

$\mathbb{N}$  的 “形” :  $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}\mathbb{N} & \subset & l^1(\mathbb{N}) & \subset & B(\mathbb{N}) & \subset & L(\mathbb{N}) \subset l^2(\mathbb{N}) \subset \dots \\ \text{SII} & & \text{SII} & & \text{SII} & & \text{SII} \\ \mathbb{C}[z]|_D & \subset & H^1(D) & \subset & H_c(D) & \subset & H^\infty(D) \subset H^2(D) \subset \dots \end{array}$$

$H^*(D)$  是哈代 (Hardy) 空间

$\mathbb{Z}$  的“形”是实空间,

$\mathbb{N}$  的“形”是复空间。

华老: “从单位圆谈起”

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = (\mathbb{N}, \times)$$

$\mathbb{N}^*$  的基：素数  $2, 3, 5, 7, \dots$

$\mathbb{N}^*$  有“形”吗？

和  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$  做类比

# 1.群方法 (Weil---实)

$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Q}_+^*$  —— 包含  $\mathbb{N}^*$  的最小群

$\mathbb{Q}_+^* \subset \mathbb{Q}$  做局部化  $\rightarrow \mathbb{Q}_p$

$\mathbf{A} = \prod \mathbb{Q}_p$  —— 有限制的直积 ( $R_p$ ) (adele环)

$$\mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/\mathbb{Q}^*$$

$\mathbb{N}^*$  的“形”:  $\mathbf{A}/\mathbb{Q}^*$  (idele类群  $C_{\mathbb{Q}} = \mathbf{A}^*/\mathbb{Q}^*$ )

# 迹公式:

$h(x) : G \rightarrow \mathbb{C}$        $G$ 局部紧群

$L_{x_0} : x \rightarrow x_0^{-1} \cdot x$       左正则表示

$$W(h) = \int_G L_x h(x) dx$$

**定理** (Atiyah-Bott)       $G = \mathbb{Q}_p^*$

$$\text{Trace}(P_\Lambda W(h)) = 2h(1)\log \Lambda + \int \frac{h(x^{-1})}{|1-x|} dx + o(1)$$

$$P_\Lambda = \hat{\chi}_{[0, \wedge]} \chi_{[0, \wedge]}$$

Connes: **A-B**定理对  $C_\mathbb{Q}$  对  $\Leftrightarrow$  Riemann猜测对

## 2. 半群方法 (复)

$$\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ / \mathbb{N}^*$$

$$H_{\mathbb{N}^*} \quad S(\mathbb{R}_+) \quad \mathcal{E}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ E(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(nx) : f \in S(\mathbb{R}_+) \right\}$$

$$H_{\mathbb{N}^*} = (S(\mathbb{R}_+) - \mathcal{E})^\perp = \mathcal{E}^\perp$$

——在  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中的正交补

$H_{\mathbb{N}^*}$  是  $\mathbb{N}^*$  的希尔伯特空间

# 特征根:

$$L_{x_0} : x \rightarrow x_0^{-1}x ; (L_{x_0} f)(x) = f(x_0^{-1}x)$$

$L_1$  为恒等映射

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L_{1+\varepsilon} - L_1}{\varepsilon} = D = x \frac{d}{dx}$$

**定理:**  $D$  是  $H_{\mathbb{N}^*}$  上的稠定算子

$\lambda$  是  $D$  的特征根  $\Leftrightarrow \zeta(\lambda) = 0$ ,

$$0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$$

## Riemann猜测:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (\text{欧拉公式})\end{aligned}$$

当 $s > 1$ 时级数绝对收敛

Riemann证明了:

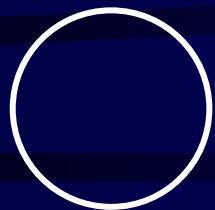
$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

$$\zeta(-2n) = 0 \quad \text{平凡零点}$$

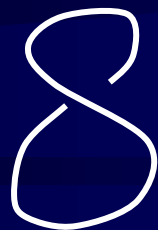
$$\mathbf{RH} : \zeta(\lambda) = 0 \text{ 非平凡} \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda = \frac{1}{2}$$



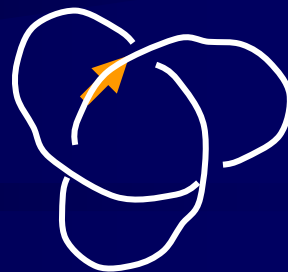
# 形



圆

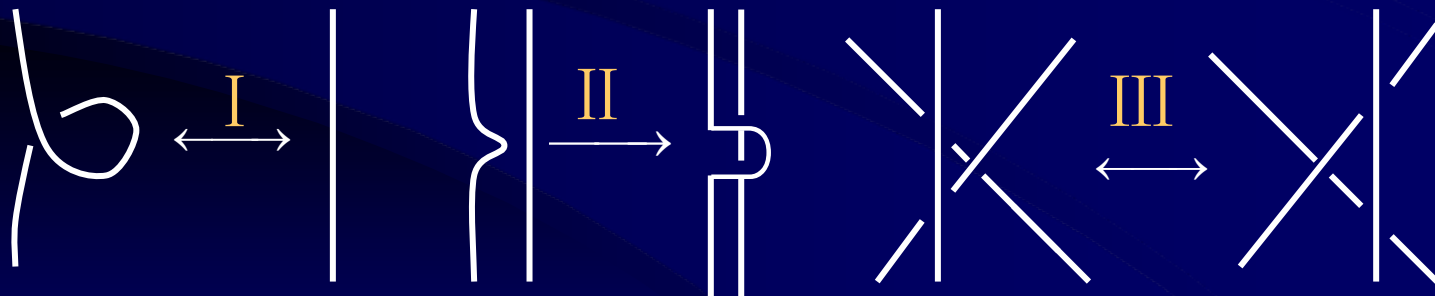


8字形



三叶形

## Reidemeister移动



# Jones多项式: $V_L(t)$

$$V_{\text{三叶形}}(t) = t + t^3 - t^4$$

$$V_{\text{三叶形}}^*(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$



## Skein关系:

$$t^{-1}V_{L_+} - tV_{L_-} = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{L_0}$$

# 群代数

$$\text{群: } S_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}\}$$

$$\Pi_{\mathbb{N}} = \{\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\} = \bigcup_n S_n$$

$$\mathbf{G} \text{ 群 } \quad \text{群代数 } \mathbb{C}G = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i : \lambda_i \in \mathbb{C}, g_i \in G \right\}$$

$$G \subset \mathbb{C}G \subset I^1(G) \subset C^*(G) \subset L(G) \subset I^2(G) \subset \dots$$

算子代数

$\hat{G}=?$  no answer in general!

要在代数里找答案！

群代数+拓扑结构=算子代数

非交换几何：

寻找非交换代数的几何不变量

例：Novikov猜测：高维Signature是否是流形的拓扑不变量

同态  $\forall G, \quad M_G: G \text{ 生成的复形}$

$$K_*(M_G) \xrightarrow{i} K_*(C^*(G))$$

Novikov 猜测：i 是单射

$L(\Pi_{\mathbb{N}})$ :

1. Connes:  $L(\Pi_{\mathbb{N}})$  的中心平凡子代数一定同构于  $M_n(\mathbb{C})$  或自身

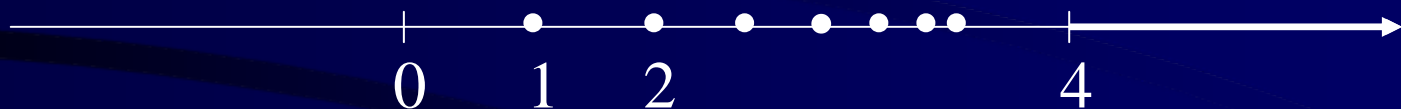
(对算子代数的分类意义重大)

## 2. Jones指标

群  $H \leq G$  , 群  $\Rightarrow [G:H] \in \mathbb{N}$

Jones:  $\forall \mathfrak{M} \subseteq L(\Pi_{\mathbb{N}})$

$$[L(\Pi_{\mathbb{N}}):\mathfrak{M}] \in \left\{ 4 \cos^2 \left( \frac{\pi}{n} \right) : n \geq 3 \right\} \cup [4, \infty]$$



发现了辫子群的表示,

构造了扭结不变量: **Jones**多项式

$\left\{ 4 \cos^2 \left( \frac{\pi}{n} \right) : n \geq 3 \right\}$  的意义?

代数 = 几何 （代数几何=代数流形）

定理：Gelfand-Naimark:  $M$  是紧拓扑空间则  $C(M)$  是交换  $C^*$ -代数: 对任意交换  $C^*$ -代数  $A$  , 一定存在  $M$  使得  $A \cong C(M)$

交换  $C^*$ -代数=拓扑空间

非交换  $C^*$ -代数=“非交换”拓扑空间

# K-理论:



$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in B \end{cases}$$

$$\chi_A \in C(A \cup B).$$

$$\chi_A \neq 1, \chi_A^2 = \chi_A$$

**A 不连通:**  $\exists P \in \mathbf{A}$ ,  $P \neq 1$ ,  $P^2 = P$  —— 投影

$K_0(A)$ :  $M_n(A)$  中投影等价类

$\searrow$   $M \times \mathbb{R}^n$  —— 平凡向量丛

$K_1(A)$ : 酉群/单位的连通分支



# K-理论的应用:

$C^*$ -代数分类 (低维)

Atiyah-Singer指标定理 (实指标)

Chern (陈) 特征...

De Rham (上) 同调  $\longrightarrow$  循环 (上) 同调

非交换代数: 微分结构?

维数?

# 维数

$$\dim \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = n$$

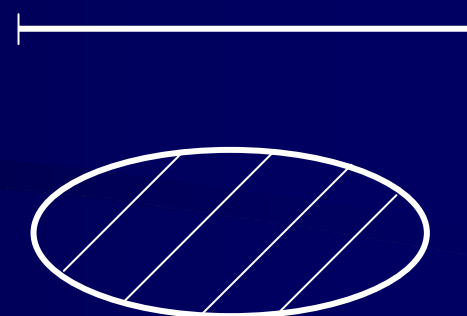
$$\mathbb{C} \langle x_1, \dots, x_n \rangle \quad \text{非交换多项式}$$

$$x_i x_j \neq x_j x_i$$

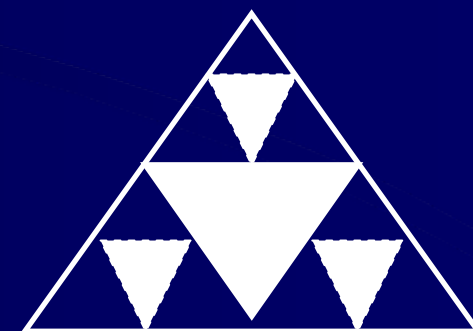
$$\delta_{\text{NC}}(\mathbb{C} \langle x_1, \dots, x_n \rangle) = n$$

# $\delta_{\text{NC}}$ —— 非交换分形维数

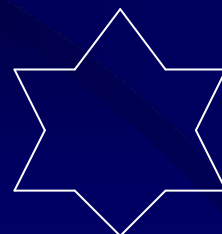
分形维数: D — 图形  
线 — 1维  
面 — 2维



Sierpinski三角形 ——  $\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58$



自相似多边形 ——  $\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.3$



...

**Sierpinski三角形**

$\delta_{\text{NC}}$  的定义:  $\mathfrak{M} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$

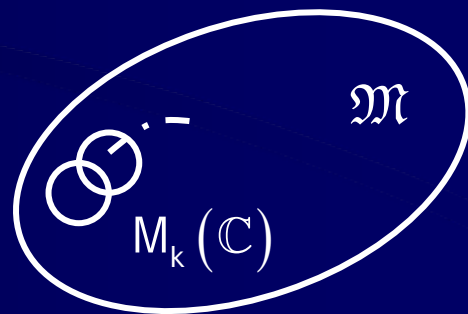
(Voiculescu)

用  $A_1, \dots, A_n \in M_k(\mathbb{C})$

逼近  $X_1, \dots, X_n$  ( $\varepsilon > 0$ )

$$\overline{\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \log \frac{\text{vol} \{ (A_1, \dots, A_n) \}}{\text{vol}(M_k(\mathbb{C}) \text{ 的单位球})}$$

$$= \delta_{\text{NC}}(X_1, \dots, X_n)$$



$\delta_{\text{NC}}$  依赖于生成元  $X_1, \dots, X_n$  吗?

# 对很多类代数: 不依赖生成元

$$\delta_{\text{NC}} \left( M_n(\mathbb{C}) \right) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\delta_{\text{NC}}(\mathbb{C}\mathbb{Z}) = 1$$

$$\delta_{\text{NC}} \left( L(\Pi_{\mathbb{N}}) \right) = 1$$

$$\delta_{\text{NC}} \left( L(\text{SL}_n(\mathbb{Z})) \right) = 1, \quad n \geq 3$$

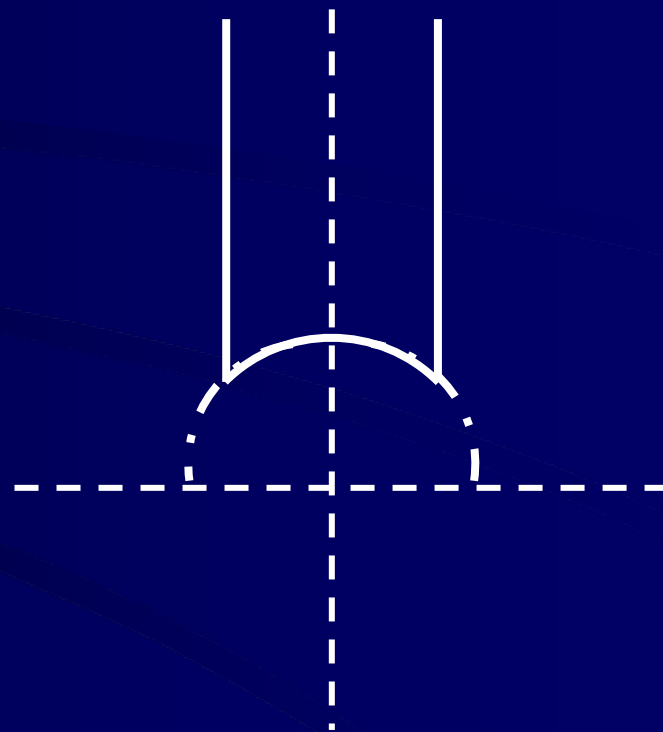
$$\delta_{\text{NC}} \left( L(\text{SL}_2(\mathbb{Z})) \right) = \frac{7}{6} > 1$$

$$\delta_{\text{NC}}(M \otimes N) = 1, \quad \dim M = \dim N = \infty$$

猜测： $L(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$  是倒数第二小的（中心平凡）无限维冯诺依曼代数吗？

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  结构丰富！

复几何： $\mathbb{C}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) =$



$\mathbb{N}^*$  需要复分析  
非交换复分析？

**Thank you!**