

# 三相非饱和土参数对波的传播的影响研究

徐长节<sup>1,2</sup>, 徐良英<sup>3</sup>, 杨园野<sup>1</sup>

(1. 华东交通大学 土木建筑学院, 江西 南昌 330013; 2. 浙江大学 滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058;  
3. 杭州市城东新城建设投资有限公司, 浙江 杭州 310058)

**摘 要:** 基于已建立的非饱和土中的波动方程, 导出 4 种体波的波速以及衰减的解析表达式。数值分析了 4 种体波的波速、衰减与孔隙率以及 Lamé 常数  $\lambda$ 、 $\mu$  之间的关系。结果表明, 随孔隙率的增大,  $P_1$  波和 S 波的波速有所提高,  $P_2$  波和  $P_3$  波的波速随孔隙率的增大而有所减小; 3 种 P 波的衰减有所增大, 其中以  $P_3$  波变化最为显著。 $P_1$  波、 $P_3$  波和 S 波的波速基本上不随 Lamé 常数  $\lambda$  变化,  $P_2$  波的波速随 Lamé 常数  $\lambda$  的增大而稍有增大。 $P_2$  及 S 波的衰减基本不随 Lamé 常数  $\lambda$  变化,  $P_1$ 、 $P_3$  波的衰减随 Lamé 常数  $\lambda$  的增大而有所减小。3 种 P 波的波速基本上不随 Lamé 常数  $\mu$  变化, S 波的波速随 Lamé 常数  $\mu$  的增大而有所增大。 $P_2$  及 S 波的衰减基本不随 Lamé 常数  $\mu$  变化,  $P_1$ 、 $P_3$  波的衰减随 Lamé 常数  $\mu$  的增大而有所减小, 其中  $P_3$  波的变化最为显著。

**关 键 词:** 非饱和土; 波传播; 混合物理论; 衰减; 孔隙率; Lamé 常数

**中图分类号:** TU 443

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 7598 (2015) 增 2 - 0340 - 05

## Effect of parameters of three-phase unsaturated soils on wave propagation

XU Chang-jie<sup>1,2</sup>, XU Liang-ying<sup>3</sup>, YANG Yuan-ye<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang, Jiangxi 330013, China;  
2. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China;  
3. Hangzhou New Eastern City Construction and Investment Co., Ltd., Hangzhou, Zhejiang 310058, China)

**Abstract:** Based on the wave propagation equation in unsaturated soils, four kinds of body waves i.e. one is S wave, and other three are P waves,  $P_1$  wave,  $P_2$  wave and  $P_3$  wave, according to the wave velocity are found in unsaturated soils through theoretic deduction. Analytic expressions for wave velocity and attenuation are proposed. Numerical analysis about the relation between the wave velocity, attenuation and the void ratio and Lamé constants are carried out. The results show that with the increasing of void ratio, the velocity of  $P_1$  wave and S wave become enhance; and the attenuation of three kinds of P waves becomes great, especially for  $P_3$  wave. Almost the velocity of  $P_1$ ,  $P_3$  and S don't change with the changes of Lamé constant  $\lambda$ , and the velocity of  $P_2$  wave become a little faster with the increasing of Lamé constant  $\lambda$ . Almost the attenuation of  $P_2$  wave and S wave don't change with the Lamé constant  $\lambda$ . The attenuation of  $P_1$  wave and  $P_3$  wave become smaller with the increasing of Lamé constant  $\lambda$ . Almost the velocity of three kinds of P waves don't change with the variation of Lamé constant  $\mu$ , but the velocity of S wave becomes faster with the increasing of Lamé constant  $\mu$ . Almost the attenuation of  $P_2$  wave and S wave don't change with the variation of the Lamé constant  $\mu$ . The attenuation of  $P_1$  wave and  $P_3$  wave decreases with the increasing of Lamé constant  $\mu$ , especially for  $P_3$  wave.

**Keywords:** unsaturated soils; wave propagation; theory of mixture; attenuation; porosity; Lamé constant

## 1 引 言

有关饱和土体中弹性波的研究已达半个世纪, 从 20 世纪 50 年代起, Biot(1941 - 1962 年)在系统地研究饱和多孔介质的变形机制及其中体波的传播问题的基础上<sup>[1-6]</sup>发表了一系列精湛的论文。自 Biot

建立多孔介质模型后, Ishihara<sup>[7-8]</sup>、Stoll<sup>[9-13]</sup>、Rice 等<sup>[14]</sup>、Zienkiewicz<sup>[15]</sup>、陈龙珠<sup>[6]</sup>从不同角度对饱和土中的波进行了研究, 在一定程度促进了 Biot 理论的应用。另外, Bowen<sup>[17]</sup>、Atkin 等<sup>[18]</sup>利用混合物理论(theory of mixtures)研究了饱和多孔介质中的波, 并证实了 Biot 理论的正确性。此后, 苗天德等<sup>[19]</sup>,

收稿日期: 2014-05-08

基金项目: 国家自然科学基金(No.51338009); 江西省 2011 协同创新中心项目资助(2011 年)

第一作者简介: 徐长节, 男, 1972 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事土动力学及基坑工程的研究。E-mail: xucj@zju.edu.cn

杨竣<sup>[20]</sup>分别对饱和土中 3 种体波的传播特性进行了全面而深入的研究。

对于非饱和土或部分饱和土的研究始于 30 年代,与饱和土相比,非饱和土考虑了液气交界面上的基质吸力<sup>[21]</sup>,许多研究也依赖基质吸力展开,着重从土-水特征曲线、强度特性、本构模型、渗流特性及吸力测量等方面展开研究,取得了一系列成果<sup>[22-26]</sup>。对于波在非饱和土体中的传播特性,White<sup>[27]</sup>、Stoll 等<sup>[28]</sup>、Dutta 等<sup>[29]</sup>、Berryman 等<sup>[30]</sup>、Singh 等<sup>[31]</sup>、周新民等<sup>[33]</sup>做过一些研究,但并未建立系统的动力方程,未能对其波速展开深入的理论研究。本文在非饱和土动力方程的基础上,对非饱和土中的波传播进行更为深入地数值研究,对于了解非饱和土中波的传播规律、促进波速勘测方法的应用有一定的意义。

## 2 问题引入

根据混合物理理论,非饱和土的动力控制方程 Vardoulakis 等<sup>[34]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} -\bar{Q}_{i,i}^f &= \alpha_{11}\dot{u}_{k,k} + \alpha_{12}\Delta\dot{p}_f \\ -\bar{Q}_{i,i}^g &= \alpha_{21}\dot{u}_{k,k} + \alpha_{22}\Delta\dot{p}_f + \alpha_{23}\Delta\dot{p}_g \\ (\lambda + 2\mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} &= -\left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)b^f\bar{Q}_i^f + \\ &\quad \frac{\gamma}{s}\rho_f\bar{Q}_i^f + \left(\bar{\rho}_s + \frac{\gamma}{s}\bar{\rho}_f\right)\ddot{u}_i - b^g\bar{Q}_i^g \\ -s\Delta p_{,i}^f &= b^f\bar{Q}_i^f + \rho_f\bar{Q}_i^f + \bar{\rho}_f\ddot{u}_i \\ -(1-s)\Delta p_{,i}^g &= b^g\bar{Q}_i^g + \rho_g\bar{Q}_i^g + \bar{\rho}_g\ddot{u}_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= sn \left( 1 + \frac{1-n}{n} \alpha_1 - \alpha_2 \right) \\ \alpha_{12} &= sn \left( \beta_f + \frac{1-n}{n} \beta_1 - \beta_2 \right) \\ \alpha_{21} &= sn \left[ \frac{1-s}{s} + \frac{(1-s)}{s} \frac{(1-n)}{n} \alpha_1 + \alpha_2 \right] \\ \alpha_{22} &= sn \left[ \frac{(1-s)}{s} \frac{(1-n)}{n} \beta_1 + \beta_2 \right] \\ \alpha_{23} &= (1-s)n / p^g \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中:下标 s、f、g 分别表示固相、液相及气相;介质绝对密度分别为  $\rho_s$ 、 $\rho_f$ 、 $\rho_g$ ;  $n$  为孔隙率;  $s$  为饱和度;  $\beta_s$  为土颗粒材料的压缩系数;  $\beta_p$  为由接触点上的集中力引起的土颗粒的压缩系数;  $\beta$  为土骨架的不排水压缩系数;  $\beta_f$  为流体的压缩系数;

$k_f$ 、 $k_g$  分别为液体与气体相对于固体的渗透系数;  $\bar{Q}_i^m$ 、 $p_m$  ( $m = s, f, g$ ) 分别为体积流和压力;  $u$  为位移。

对式(1)进行散度运算,在考虑  $Z$  方向上传播的弹性波的基础上,由波传播的性质,经过推导可知有 3 种压缩波,按波速大小分别称之为  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  波,其衰减系数  $\Delta_d$ ,波速  $C_{dj}$  为

$$\Delta_{dj} = fn_j; \quad C_{dj} = 1/m_j \quad (3)$$

对式(1)进行旋度运算,可以推知只有一种剪切波存在,常称为 S 波,其衰减系数  $\Delta_r$ ,波速  $C_r$  为

$$\Delta_r = fn'; \quad C_r = 1/m' \quad (4)$$

笔者等利用数值方法已全面探讨了非饱和土中 4 种体波的传播速度和衰减与频率及含气量之间的变化关系<sup>[35]</sup>。本节中,将进一步对 4 种体波的波速、衰减与孔隙率以及 Lamé 常数  $\lambda$ 、 $\mu$  之间的关系进行研究。非饱和土参数的选取参考 Vardoulakis 等<sup>[17]</sup>的研究成果,见表 1。

表 1 非饱和土计算参数

Table 1 Calculating parameters of unsaturated soils

参数	量值	参数	量值
$\lambda$ / Pa	$1.0 \times 10^9$	深度 $h$ / m	5
$\mu$ / Pa	$1.6 \times 10^8$	$\beta_s$ / Pa <sup>-1</sup>	$5.0 \times 10^{-8}$
孔隙率 $n$	0.7	$\beta_f$ / Pa <sup>-1</sup>	$2.5 \times 10^{-8}$
$\rho_s$ / (kg/m <sup>3</sup> )	2 600	$\beta_p$ / Pa <sup>-1</sup>	$1.0 \times 10^{-9}$
$\rho_f$ / (kg/m <sup>3</sup> )	1 000	$k_f$ / (m/s)	$4.0 \times 10^{-4}$
$\rho_g$ / (kg/m <sup>3</sup> )	1 290	$k_g$ / (m/s)	$6.0 \times 10^{-4}$

## 3 波速、衰减与孔隙率的关系

取 Lamé 常数  $\lambda = 1.0 \times 10^3$  MPa,  $\mu = 1.6 \times 10^2$  MPa,孔隙率  $n = 0.7$ ,饱和度为 0.8,频率为 100 Hz,孔隙率  $n$  的变化范围为 0.2 ~ 0.8。

图 1 为 4 种体波的波速随孔隙率的变化曲线。从图中可以看出,随孔隙率的增大, $P_1$  波和 S 波的波速有所提高, $P_2$ 、 $P_3$  波的波速随孔隙率的增大而有所减小。图 2 为 4 种体波的衰减随孔隙率的变化曲线。从图中可以看出,随孔隙率的增大,3 种 P 波的衰减有所增大,其中以  $P_3$  波变化最为显著;3 种 P 波中, $P_3$  波的衰减最大, $P_1$  波的衰减最小,S 波基本上无衰减现象。

## 4 波速、衰减与 Lamé 常数 $\lambda$ 关系

取 Lamé 常数  $\mu = 1.6 \times 10^2$  MPa,孔隙率  $n$  为 0.7,饱和度为 0.8,频率为 100 Hz, Lamé 常数  $\lambda$  的变化

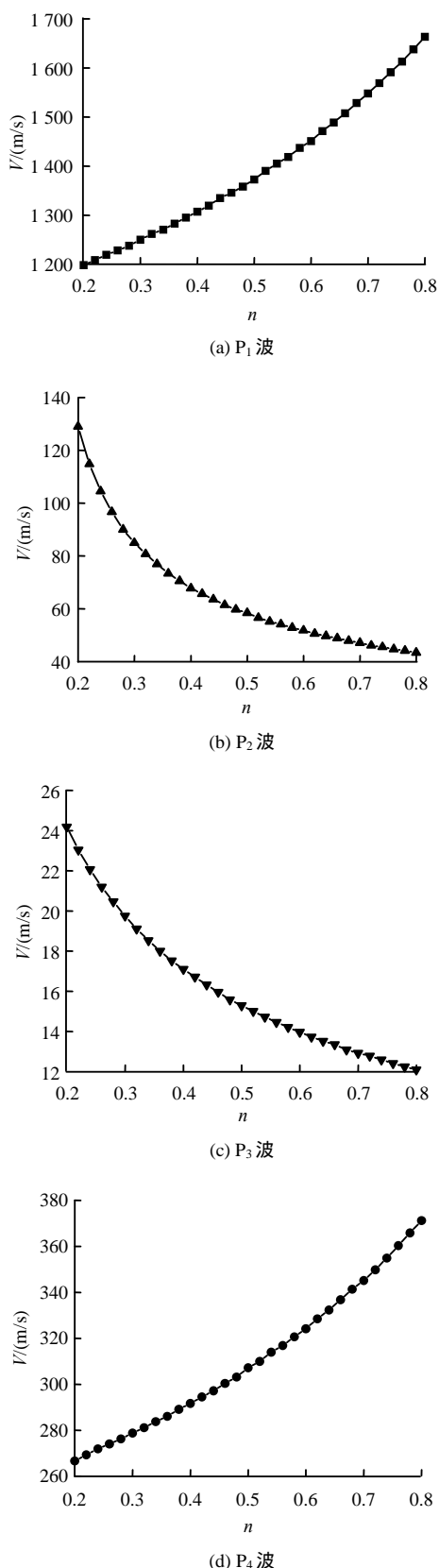


图1 4种体波波速与孔隙率关系

Fig.1 Relationships between velocity and porosity of four kinds body wave

范围为  $(1.0 \sim 2.0) \times 10^3$  MPa。

波速随Lame常数 $\lambda$ 变化计算结果如图3所示。

从图中可见,在参数变化范围内4种体波中 $P_1$ 波、 $P_3$ 波和S波的波速基本上不随Lame常数 $\lambda$ 变化, $P_2$ 波的波速随Lame常数 $\lambda$ 的增大而稍有增大。

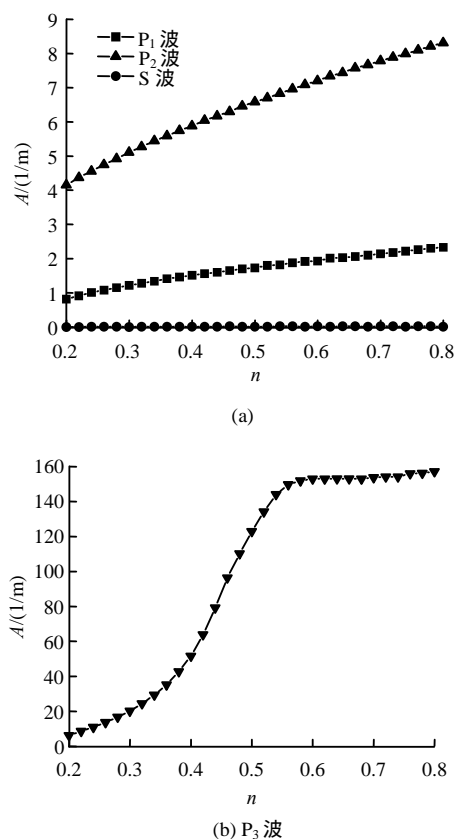
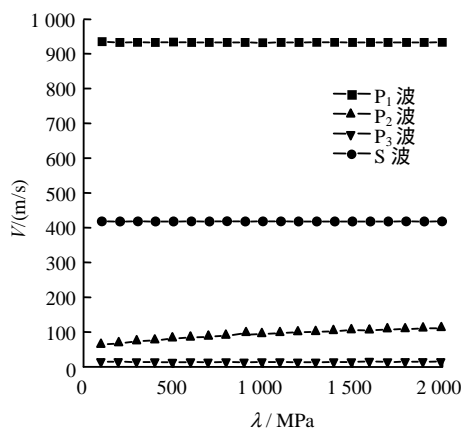
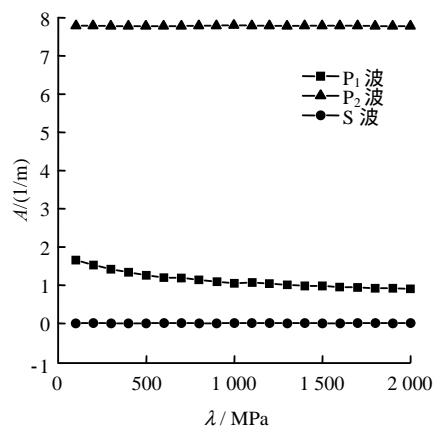
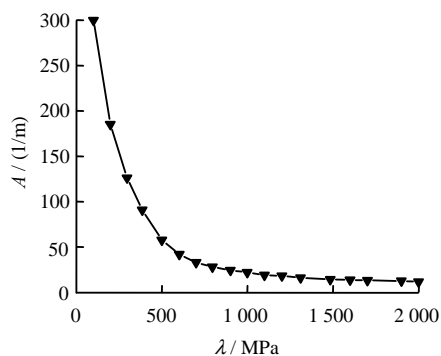


图2 4种体波的衰减与孔隙率的关系

Fig.2 Relationships between porosity and attenuation of four kinds body wave

图3 4种体波波速与Lame常数 $\lambda$ 关系Fig.3 Relationships between wave velocity and constant  $\lambda$  of four kinds body wave

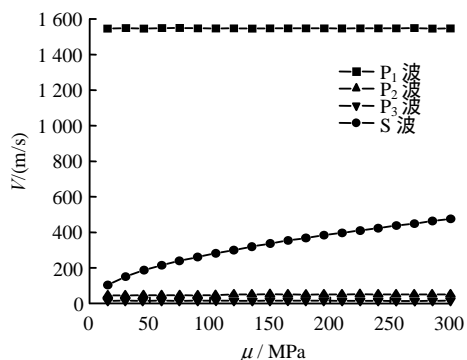
4种体波衰减与Lame常数 $\lambda$ 的关系如图4所示。从图中可以看出, $P_2$ 、S波的衰减基本不随Lame常数 $\lambda$ 变化, $P_1$ 、 $P_3$ 波的衰减随Lame常数 $\lambda$ 的增大而有所减小。

(a)  $P_1$ 、 $P_2$ 、S 波与  $\lambda$  关系(b)  $P_3$  波与  $\lambda$  关系图 4 4 种体波衰减与 Lamé 常数  $\lambda$  关系Fig.4 Relationships between attenuation and constant  $\lambda$  of four kinds body wave

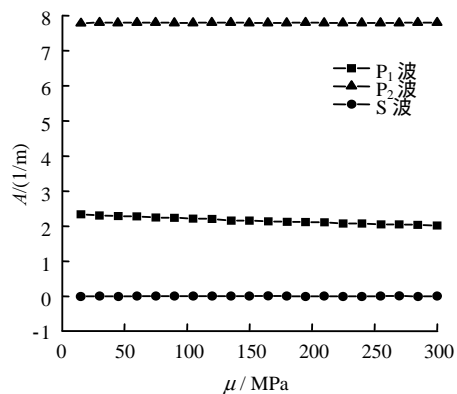
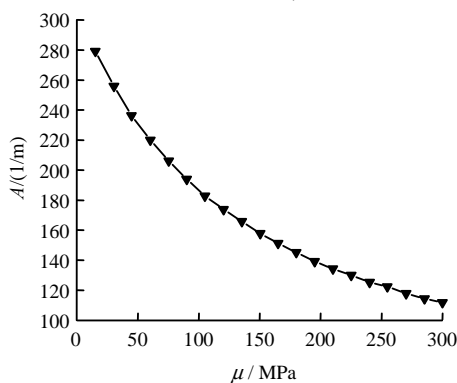
## 5 波速、衰减与 Lamé 常数 $\mu$ 关系

取 Lamé 常数  $\lambda = 1.6 \times 10^2$  MPa, 孔隙率  $n = 0.7$ , 饱和度为 0.8, 频率为 100 Hz, Lamé 常数  $\mu$  的变化范围为  $(0.15 \sim 3.0) \times 10^2$  MPa。

波速与 Lamé 常数  $\mu$  变化关系曲线如图 5 所示。从图中可以看出, 3 种 P 波的波速基本上不随 Lamé 常数  $\mu$  变化, S 波的波速随 Lamé 常数  $\mu$  的增大而有所增大。

图 5 4 种体波波速与 Lamé 常数  $\mu$  关系Fig.5 Relationships between wave velocity and constant  $\mu$  of four kinds body wave

4 种体波衰减与 Lamé 常数  $\mu$  的关系如图 6 所示。从图中可以看出,  $P_2$ 、S 波的衰减基本不随 Lamé 常数  $\mu$  变化,  $P_1$ 、 $P_3$  波的衰减随 Lamé 常数  $\mu$  的增大而有所减小, 其中  $P_3$  波的变化最为显著。

(a)  $P_1$ 、 $P_2$ 、S 波与  $\mu$  关系(b)  $P_3$  波与  $\mu$  关系图 6 4 种体波衰减与 Lamé 常数  $\mu$  关系Fig.6 Relationships between attenuation and constant  $\mu$  of four kinds body wave

## 6 结 论

(1) 随孔隙率的增大,  $P_1$ 、S 波的波速有所提高,  $P_2$ 、 $P_3$  波的波速随孔隙率的增大而有所减小。3 种 P 波的衰减有所增大, 其中以  $P_3$  波变化最为显著。

(2)  $P_1$ 、 $P_3$ 、S 波的波速基本上不随 Lamé 常数  $\lambda$  变化,  $P_2$  波的波速随 Lamé 常数  $\lambda$  的增大而稍有增大。 $P_2$ 、S 波的衰减基本不随 Lamé 常数  $\lambda$  变化,  $P_1$ 、 $P_3$  波的衰减随 Lamé 常数  $\lambda$  的增大而有所减小。

(3) 3 种 P 波的波速基本上不随 Lamé 常数  $\mu$  变化, S 波的波速随 Lamé 常数  $\mu$  的增大而有所增大。 $P_2$ 、S 波的衰减基本不随 Lamé 常数  $\mu$  变化,  $P_1$ 、 $P_3$  波的衰减随 Lamé 常数  $\mu$  的增大而有所减小,  $P_3$  波的变化最为显著。

## 参 考 文 献

- [1] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J], *Journal of Applied Physics*, 1941, 12:

- 155 - 164.
- [2] BIOT M A. The interaction of Rayleigh and Stoneley waves in the ocean bottom, Bull. Seism[J]. **Journal of Acoustical Society of America**, 1952, 42:81 - 93.
  - [3] BIOT M A, Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid[J]. **Journal of Applied Physics**, 1955, 26: 182 - 185.
  - [4] BIOT M A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1956, 23: 91 - 95.
  - [5] BIOT M A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid[J]. **Journal of Acoustical Society of America**, 1956, 28: 168 - 191.
  - [6] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous dissipative media[J]. **Journal of Acoustical Society of America**, 1962, 34: 1482 - 1498.
  - [7] ISHIHARA K. Propagation of compressional waves in a saturated soil[C]// Proceedings of International Symposium of Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials. Mexico: University of Mexico Press, 1963: 195 - 206.
  - [8] ISHIHARA K. Approximate forms of wave equations for water-saturated porous materials and related dynamic moduli[J]. **Soils and Foundations**, 1970, 10 :10 - 38.
  - [9] STOLL R D, BRYAN G M. Wave attenuation in saturated sediments[J]. **Journal of the Acoustical Society of America**, 1970, 47: 1440 - 1447.
  - [10] STOLL R D. Acoustic waves in saturated sediments[C]// Physics of Sound in Marine Sediments. New York: Plenum Press, 1974:19 - 39.
  - [11] STOLL R D. Acoustic waves in ocean sediments[J]. **Geophysics**, 1977, 42: 715 - 725.
  - [12] STOLL R D. Damping in saturated soils[C]//Proceedings of ASME Special Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics. New York: Academic Press, 1978: 960 - 975.
  - [13] STOLL R D Experimental studies of attenuation in sediments[J].**The Journal of the Acoustical Society of America**, 1979, 66: 1152 - 1160.
  - [14] RICE J R, CLEARY M P. Some basic stress-diffusion solutions for fluid saturated elastic porous media with compressional constituents[J]. **Reviews of Geophysical and Space Physics**, 1976, 14: 227 - 241.
  - [15] ZIENKIEWICZ O C, SHIONU T. Dynartric behaviour of saturated ibmus media; the generalized Biot formulation and its numerical solution[J]. **J. Int. J. Numer. Meth.**, 1984, 8: 71 - 96.
  - [16] 陈龙珠. 饱和土中弹性波的传播速度及其应用[博士学位论文 D]. 杭州: 浙江大学, 1987.
  - [17] BOWEN R M. Theory of mixture[M]. New York: Academic Press, 1976: 1 - 127.
  - [18] ATKIN R J, CRAINE R E. Continuum theories of mixtures : basic theory and historical development[J]. **J. Mech. Appl. Math.**, 1976, 29: 209 - 244.
  - [19] 苗天德, 朱久江. 对饱和多孔介质波动问题中本构关系的探讨[J]. **力学学报**, 1995, 27(5): 536 - 543.
  - [20] MIAO Tian-de, ZHU Jiu-hong. Essay on constitutive relation of wave propagation in saturated porous media[J]. **Acta Mechanica Sinca**, 1995, 27(5): 536 - 543.
  - [21] 杨峻. 层状饱和土中波的传播[博士学位论文 D]. 杭州: 浙江大学, 1996.
  - [22] 张芳枝, 梁志松, 周秋娟. 非饱和土性状及其边坡稳定性[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2011: 1 - 11.
  - [23] FREDLUND D G , RAHARDJO H. 非饱和土土力学[M]. 陈仲颐, 张在明, 陈愈炯, 等译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997: 22 - 304.
  - [24] 薛守义. 高等土力学[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2007.
  - [25] ALONSO E E , GENS A , JOSA A. A constitutive model for partially saturated soils[J]. **Geotechnique**, 1990, 40: 405 - 430.
  - [26] 张雪东, 赵成刚, 刘艳. 变形对非饱和土渗透系数影响规律模拟研究[J]. **工程地质学报**, 2010, 18(1): 132 - 138.
  - [27] ZHANG Xue-dong, ZHAO Cheng-gang, LIU Yan. Probability based model for influence of deformation on hydraulic conductivity function of undsaturated soils[J]. **Journal of Engineering Geology**, 2010, 18(1): 132 - 138.
  - [28] 卢宁, WILLIAM J L.非饱和土力学[M]. 韦昌富, 侯龙, 简文星译. 北京: 高等教育出版社, 2012: 4 - 328.
  - [29] WHITE J E. Computed seismic speeds and attenuation in rocks with partially gas saturation[J]. **Geophysics**, 1975, 40: 224 - 232.
  - [30] STOLL R D , KAN T K. Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface[J]. **Journal of Acoustical Society of America**, 1981, 70(1): 149 - 156.
  - [31] DUTTA N C, ODE H. Sismic reflections from a gas water contact[J]. **Geophysics**, 1983, 48(2): 148 - 162.
  - [32] BERRYMAN J G, THIGPEN L, CHIN R C Y, et al. Bulk elastic wave propagation in partially saturated porous solids[J]. **Journal of Acoustical Society of America**, 1988, 84: 360 - 373.
  - [33] SINGH J , TOMAR S K. Reflection and transmission of transverse waves at a plane interface between two different porous elastic solid half-spaces[J]. **Applied Mathematics and Computation**, 2006, 176(1): 364 - 378.
  - [34] 周新民, 夏唐代, 徐平, 等. 饱和土介质中地震波在水气界面上的反射与透射[J]. **地震学报**, 2006, 28(4): 372 - 379.
  - [35] ZHOU Xin-min, XIA Tang-dai, XU Ping, et al. Seismic ref lection and transmission coefficients at an air-water interface of saturated porous soil[J]. **Acta Seismologica Sinica**, 2006, 28(4): 372 - 379.
  - [36] VARDOULAKIS I, BESKOS D E. Dynamic behavior of nearly saturated porous media[J]. **Mechanics and Materials**, 1986, 5: 87 - 108.
  - [37] 徐长节, 史焱永. 非饱和土中波的传播特性[J]. **岩土力学**, 2004, 25(3): 354 - 358.
  - [38] XU Chang-jie, SHI Yan-yong. Characteristics of wave propagation in unsaturated soils[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(3): 354 - 358.